



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina

FEDERICI COMMANDINI.

QUIBUS ACCEDUNT

Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa.

Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum.

In usum Juventutis Academicæ.



OXONIÆ.

E THEATRO SHELDONIANO, MDCCXXIII.

Impensis *Rich. Clements* Bibliop. *Oxon.*

Prostat apud *J. Knapton* & *C. Rivington* Bibliop. in Cœmiterio D. Pauli Lond.

Imprimatur,

BER. GARDINER

Vic. Can. *OXON.*

March 25. 1715.





PRÆFATIO.

POST tot nova *Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emiſſa, eſt fortaſſe quod miretur Tyro Mathematicus, annoſa hæc, & (ut quibuſdam videntur) obſoleta* Euclidis *ϛοιχεῖα è prelo denuo prodire: præſertim cum non pauca in illis vitia detexiſſe ſibi viſi ſint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philoſophi* Euclidis *Definitiones parum perſpicuas, demonſtrationes vix evidentes, res omnes malo ordine diſpoſitas, aliaſque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad ſua uſque tempora latentes, ſe inveniſſe jactant.*

At tantorum virorum pace, audacter aſſero, Euclidem ab iis immerito reprehenſum eſſe, ejuſque Definitiones diſtinctas & claras, è primis principiis & conceptibus noſtris faciliorem & ſimplicioribus petitas eſſe; demonſtrationes Elegantes perſpicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervoſam, ut facile inducat credere obſcuritatem iſtam à ſciolis illis toties inſimulatam, confuſis potius & perplexis eorum ideis, quam demonſtrationibus ipſis imputandum eſſe. Et utcunque nonnulli quærantur de malâ rerum diſpoſitione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides; aliam tamen methodum magis idoneam, & diſcentibus faciliorem inter omnia hoc genus ſcripta invenio nullam.

Non meum eſt hîc loci hypercriticis Horum captiunculis ſigillatim reſpondere: ſed in his Elementis vel mediocriter verſato, ſtatim patebit, Calumniatores hos ſuam potius oſcitantiam monſtrare, quam veros in noſtro authore lapſus arguere; imo ne hoc quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem unum, aut alterum è tot novis ſyſtematibus inveniri poteſt, in quibus plures non ſunt labes, imo fœdiores paralogiſmi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Poſt tot infelices in Geometriâ reformandâ conatus, quidam non infimi Geometræ Elementa de novo conſtruere non auſi, ipſum Euclidem omnibus aliis Elementorum Scriptoribus merito prætulerunt, eique edendo ſuas curas impenderunt; hi tamen ipſi neſcio quibus opinionibus ducti, alias propoſitiones prorſus omittunt, aliarumqae demonſtrationes in pejus mutant. Inter illos eminent Tacquetus & Deſchalles, quorum utrique malo quodam fato contigit, ut elegantes quaſdam & in Elementis optimo jure ponendas propoſitiones quaſi ineptas & inutiles rejecerint, quales ſunt propoſitiones 27, 28, 29. libri ſexti, cum aliis nonnullis quarum uſus fortaſſe illos latebat. Inſuper quandocunque ipſas Eulidis demonſtrationes deſerunt, multum in argumentando peccant, & â concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonſtrationes Euclidis in totum repudierunt, & Proportionis definitionem aliis terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tantum è duabus proportionalium ſpeciebus comprehendit, & quantitatibus commenſurabilibus ſolummodo competit: nihilominus ſuas, quæ ſunt de proportione, demonſtrationes omni quantitati tam incommenſurabili quam commenſurabili in ſequentibus libris applicant.

plicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometræ facile condonassent, nisi hi authores in aliis suis scriptis de Scientiis Mathematicis benè meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostentent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt; Quantitatum proportionalium definitionem intelligo: in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Hujus proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometræ, atque defectum demonstratione suâ supplendum suscipiunt. Hîc iterum contemplari licet insignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est hæc Euclidis definitio; qui illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione suâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum authori licebat, quælibet nomina quantitatibus hæc requisita habentibus, arbitrio suo affigere? Licebat proculdubio; suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque conclusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo

quam

quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad definitiones libri quinti attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometræ incidit mentio, præterire non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipsius Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne unâ qnidem omissa propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucscit, quam in libris istius generis fieri solet. Plura præterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus, demonstrationes ejus eâ brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriâ parum versato difficiles & obscuræ fiant. Multæ propositiones quæ ipsum Euclidem legenti perspicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosæ & vix intelligibiles redduntur; qualis est V. G. 13. primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; rectius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) à figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissimâ

methodo

methodo tradenda ſunt, nec ſymbolis nec notis nec obſcuris principiis aliunde petitis involvenda.

Ut Elementa Barovii nimiâ brevitate, ſic ea, quæ à Clavio traduntur, moleſtâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariiſque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obſcurum eſſe, ut tantâ farragine notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipſum omnibus ſuis Commentatoribus faciliorem inventuri ſint. In demonſtrationibus Geometricis ut nimia brevitas tenebras parit, ſic nimia verboſitas plus tædii & confuſionis quam lucis affert.

Hiſce præcipue inductus rationibus, prima ſex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex verſione Frederici Commandini *in uſum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per ſe edenda curavi; à cæteris abſtinui, tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias pleraſque Matheſeos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, ſufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, Græce & Latine nitidiſſimis Characteribus adornata ſummaque cura & fide emendata nuper è prælo Academico prodiere.*

Porro in gratiam eorum, qui Geometriam Elementarem ad Praxes vitæ commodis inſervientes applicare deſiderant, Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ compendium adjunxi, cujus Artis ope, magnitudines Geometricæ menſurantur, ipſarumque dimenſiones numeris ſubjiciuntur.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

PUnctum eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur punctis.

V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt quæ ex æquo ſuis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſeſe contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

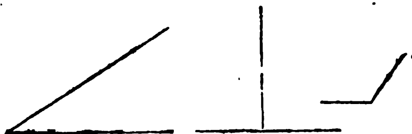
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cum vero recta linea super rectâ lineâ insistens, eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana, una linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

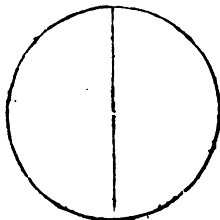
Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum secat.

XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

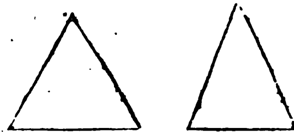
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, sive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

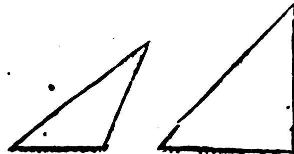


XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

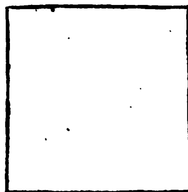
Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt, quod & æquilaterum eſt, & rectangulum.



XXXI.

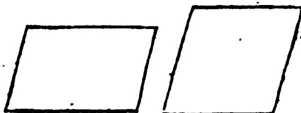
Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem æquilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & oppoſita latera, & oppoſitos angulos inter ſe æquales habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

POSTULATA.

I.

Poſtuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum deſcribere.

AXIOMATA.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adjiciantur tota ſunt æqualia.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, tota ſunt inæqualia.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VII.

Et quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VIII.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt æqualia.

IX.

Totum eſt ſua parte majus.

X.

Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

XII.

Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter ſe conveniunt ex ea parte, in qua ſunt anguli duobus rectis minores.

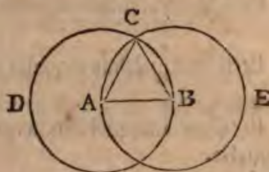


Not. *Cum plures anguli ad unum punctum exiſtunt, deſignatur quilibet tribus literis, quarum illa quæ eſt ad verticem anguli, in medio ponitur.* V.G. *in figura Prop.* 13. *libri primi angulus à rectis* AB, BC *comprehenſus dicitur angulus* ABC, *&* *angulus à rectis* AB, BE *contentus dicitur angulus* ABE.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata AB, oportet super ipsa AB triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem AB circulus describatur BCD[a]. Et rursus centro B, intervalloque BA de-
3. Post. scribatur circulus ACE[a], & à puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad AB ducantur
1. Post. rectæ lineæ CA CB[b]. Quoniam igitur A centrum est circuli DBC, erit AC ipsi AB[c] æ-
15. Def. qualis, rursus quoniam B circuli CAE est centrum, erit BC æqualis BA: ostensa est autem & CA æqualis AB. utraque igirur ipsarum CA CB ipsi AB est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo CA ipsi CB est æqualis. tres igitur CA AB BC inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est ABC, & constitutum est super data recta linea terminata AB. quod fecisse oportebat.



PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC. oportet ad A punctum, ipsi BC rectæ lineæ æqualem rectam
Postul. 1. lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea AC[a]:
Prima hujus. & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum DAC[b], producanturque in directum ipsis DA DC rectæ lineæ AE
Postul. 2. CG[c]. & centro quidem C, intervallo autem BC circulus
3. Post. BGH describatur[d]. Rursusque centro D, & intervallo DG describatur circulus GKL. Quoniam igitur punctum C centrum est BGH circuli, erit
Def. 15. BC ipsi CG æqualis[e]. Et rursus quoniam D centrum est circuli GKL, erit DL æqualis DG: quarum DA est æqualis
Axiom. 3. DC. reliqua igitur AL reliquæ GC est æqualis[f]. Ostensa autem

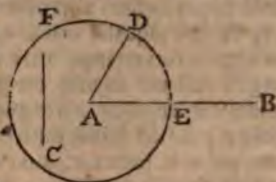


autem eſt BC æqualis CG. Quare utraque ipſarum AL BC eſt æqualis ipſi CG. Quæ autem eidem æqualia ſunt, & inter ſe ſunt æqualia. Ergo, & AL eſt æqualis BC. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis poſita eſt AL. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majore minori æqualem abſcindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C; quarum major ſit AB. oportet a majore AB minori C æqualem rectam lineam abſcindere. Ponatur ad A punctum ipſi C æqualis recta linea AD [a], & centro quidem A, intervallo autem AD circulus deſcribatur DEF [b]. Et quoniam A centrum eſt DEF circuli, erit AE ipſi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. Utraque igitur ipſarum AE, C ipſi AD æqualis erit. Quare & AE ipſi C eſt æqualis [c]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB & C à majore AB minori C æqualis Abſciſſa eſt: Quod feciſſe oportebat.

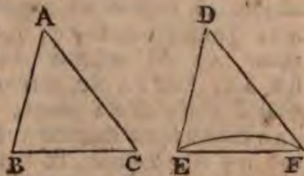


[a] Per antecedentem.
[b] Poſt.
[c] Axiom.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: Et baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipſi DF; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & baſim BC baſi EF æqualem eſſe, & triangulum ABC æquale triangulo DEF, & reliquos angulos reliquis angulis æquales,



æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF: & angulum ACB angulo DFE. Triangulo enim ABC applicato ipſi DEF, & puncto quidem A poſito in D, recta vero linea AB in ipſa DE: & punctum B puncto E congruet; quod AB ipſi DE ſit æqualis. Congruente autem AB ipſi DE; congruet & AC recta linea rectæ lineæ DF cum angulus BAC ſit æqualis angulo EDF. Quare, & C congruet ipſi F: eſt enim recta linea AC æqualis rectæ DF. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & baſis BC baſi EF congruet. Nam ſi puncto quidem B congruente ipſi E, C vero ipſi F; baſis BC baſi EF non congruit; duæ rectæ lineæ ſpatium comprehen-
Ax. 10. dent: quod [a] fieri non poteſt. Congruet igitur BC baſis, baſi EF, & ipſi æqualis erit. Quare & totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, & ipſi erit æquale; & reliqui
Axiom. 8. anguli reliquis angulis congruent, & ipſis æquales [b] erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, & angulus ACB angulo DFE. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: quod oſtendere oportebat.

PROP. V. THEOR.

Iſocelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.

Sit iſoſceles triangulum ABC; habens AB latus lateri AC æquale, & producantur in directum ipſis AB AC rectæ lineæ BD CE. Dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE æqualem eſſe. Sumatur enim in linea BD, quodvis punctum F; atque à
3. hujus. majore AE minori AF æqualis [a] auferatur AG; junganturque FC, GB. Quoniam igitur AF eſt æqualis AG; AB vero ipſi AC; duæ FA AC, duabus GA AB æquales ſunt, altera alteri; & angulum FAG communem continent, baſis igitur FC
4. hujus. baſi GB eſt [b] æqualis, & triangulum AFC æquale triangulo AGB; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera



latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG; angulus vero AFC angulo AGB. Et quoniam tota AF toti AG eſt æqualis; quarum AB eſt æqualis AC; erit [c] & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Oſtenſa eſt autem FC æqualis GB. duæ igitur BF, FC duabus CG GB æquales ſunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB: eſtque baſis ipſorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur FBC eſt æqualis angulo GCB; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus CBG eſt æqualis ipſi BCF: erit reliquus [d] ABC reliquo ACB æqualis; & ſunt ad baſim ABC trianguli: oſtenſus autem eſt & FBC angulus æqualis angulo GCB; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. Quod oſtendiſſe oportebat.

c Axiom.

d Axiom.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale eſſe: Si enim inæqualis eſt AB ipſi AC; altera ipſarum eſt major. Sit major AB; atque à majori AB minori AC æqualis [a] auferatur DB; & DC jungatur. Quoniam igitur DB eſt æqualis ipſi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Baſis igitur DC baſi AB eſt [b] æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus majori; quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt AB ipſi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod monſtraſſe oportuit.

a 3. hujus

b 4. hujus



Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum eſt quoque æquilaterum.

PRO-

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

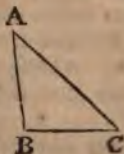
Si enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis lineis A C C B, alia duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri constituantur ad aliud atque aliud punctum C & D; ad easdem partes ut ad C & D, eosdem habentes terminos A & B, quos primæ rectæ lineæ, ita ut C A quidem sit æqualis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit, [a] 5. hujus. & angulus A C D angulo A D C æqualis [a]. Major igitur est A D C angulus angulo B C D. Quare angulus B D C angulo B C D multo major erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B & angulus B D C æqualis erit angulo B C D: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

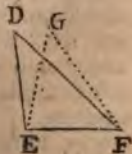


PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C, duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; ut sit A B quidem æquale D E; A C vero ipsi D F; habeant autem, & basim B C basi E F æqualem.





Dico

Dico angulum quoque B A C angulo E D F æqualem eſſe. Triangulo enim A B C applicato ipſi D E F triangulo, & puncto quidem B poſito in E; recta vero liena B C in E F: congruet & C punctum puncto F, quoniam B C ipſi E F eſt æqualis. Itaque congruente B C ipſi E F; congruent & B A A C ipſis E D D F. ſi enim baſis quidem B C baſi E F congruit; latera autem B A A C lateribus E D D F non congruunt, ſed ſitum mutent; ut E G G F: conſtituentur in eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad eaſdem partes; eoſdem habentes terminos. non conſtituuntur autem; ut demonſtratum [a] eſt. non igitur, ſi baſis B C congruit baſi E F, non congruent & B A A C latera lateribus E D D F. congruent igitur. Quare & angulus B A C angulo E D F congruet, & ipſi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & baſim baſi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonſtrare oportebat.

[a] per 7. hujus.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

Sit datus angulus rectilineus B A C; itaque oportet ipſum bifariam ſecare. Sumatur in linea A B quodvis punctum D; & à linea A C ipſi A D æqualis [a] auferatur A E; junctaque D E conſtituatur ſuper ea [b] triangulum æquilaterum D E F; & A F jungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam ſecari. Quoniam enim A D eſt æqualis A E; communis autem A F: duæ D A A F duabus E A A F æquales ſunt, altera alteri; & baſis D F æqualis baſi E F. angulus [c] igitur D A F angulo E A F eſt æqualis. quare datus angulus rectilineus B A C à recta linea A F bifariam ſectus eſt; quod facere oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 1. hujus.
[c] 8. hujus.

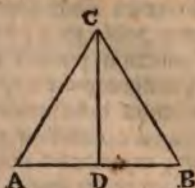
PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare.

Sit data recta linea terminata A B; oportet ipſam A B bifariam ſecare. conſtituatur ſuper [a] ea triangulum æquilaterum A B C; &

[a] 1. hujus.

b 9. hujus. & fecetur A C B angulus b bifariam recta linea C D: Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam fecari. Quoniam enim A C eft æqualis C B; communis autem C D; duæ A C C D duabus B C C D æquales funt; altera alteri; & angulus A C D æqualis angulo B C D. bafis igitur

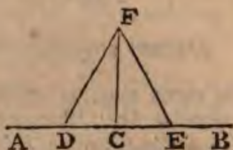


c 4. hujus. A D bafi B D eft c æqualis. Et ob id recta linea terminata A B bifariam fecta eft in puncto D: quod facere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

Datæ rectæ lineæ à puncto in ipfa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea A B, & datum in ipfa punctum C. oportet à puncto C ipfi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quodvis punctum D: ipfique C D æ-
a 3. hujus. qualis a ponatur C E, & fuper D E
b 1. hujus. conftituatur b triangulum æquilaterum F D E, & F C jungatur. Dico datæ rectæ lineæ A B à puncto C in ipfa dato, ad rectos angulos ductam effe F C Quoniam enim D C eft æqualis C E, & F C communis; erunt duæ



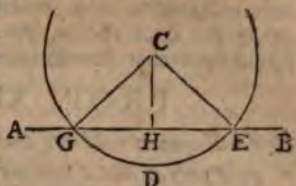
D C C F duabus E C C F æquales, altera alteri; & bafis D F
c 8. hujus. eft æqualis bafi F E. angulus igitur D C F angulo E C F eft c æqualis, & funt deinceps. Quando autem recta linea fuper rectam lineam infiftens, eos qui deinceps funt, angulos æ-
d Def. 10. quales inter fe fecerit; rectus d eft uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipforum D C F F C E eft rectus. Datæ igitur rectæ lineæ A B à puncto in ipfa dato C ad rectos angulos ducta eft F C recta linea. Quod feciffe oportuit.

PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non eft, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in ea non eft. Oportet fuper data recta linea

linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem C D circulus [a] describatur E D G: & E G in H bifariam [b] secetur: junganturque C G C H C E, Dico super data recta linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duæ G H H C, duabus E H H C æquales sunt, altera alteri; & basis C G est æqualis basi C E. Angulus igitur C H G angulo C H E est [c] æqualis, & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum & quæ insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super data recta linea infinita A B à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est C H. Quod facere oportebat.

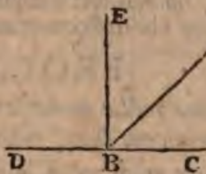


[a] Postul. 3.
[b] 10. hujus.
[c] 8. hujus.
[d] Def. 10.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam A B super rectam C D consistens angulos faciat C B A A B D. Dico C B A A B D angulos vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales; si enim C B A est æqualis ipsi A B D; duo recti [a] sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi C D ad rectos [b] angulos B E. anguli igitur C B E E B D sunt duo recti. Et quoniam C B E, duobus C B A A B E est æqualis, communis apponatur E B D: ergo anguli C B E E B D tribus angulis C B A A B E E B D sunt [c] æquales. Rursus quoniam D B A angulus est æqualis duobus D B E E B A, communis apponatur A B C. anguli igitur D B A A B C tribus D B E E B A A B C æquales sunt. At ostensum est angulos quoque C B E E B D eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, [d] & inter se æqualia sunt: ergo & anguli C B E E B D ipsis D B A A B C sunt æquales, suntque C B E E B D duo recti anguli



[a] Def. 10.
[b] 11. hujus.
[c] Axiom. 2.
[d] Axiom. 1.

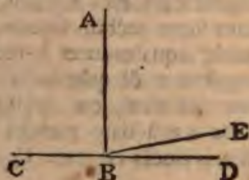
anguli, igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli ABC ABE [a] duobus rectis sunt æquales. Sed & anguli ABC ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD. Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

[a] 13. hujus.



PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens augulos facit CEA AED; erunt hi [a] duobus rectis æquales

[a] 13. hujus.



æquales. Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales [a] duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus [b] CEA reliquo BED est æqualis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat. [b] Axiom. 3

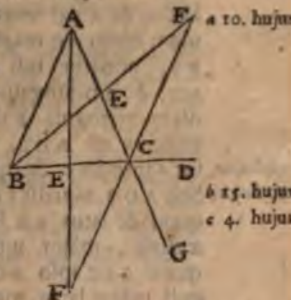
Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam [a] in E, & juncta BE producatur ad F; ponaturque ipsi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC, & AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis [b], ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis [c] est basi FC; & AEB triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.



[a] 10. hujus
[b] 15. hujus
[c] 4. hujus

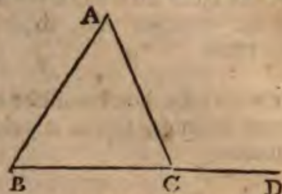
PROPO-

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim B C ad D. Et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D major [a] est interiore, & opposito A B C: communis apponatur A C B. Anguli igitur A C D A C B angulis A B C A C B majores sunt. Sed A C D A C B sunt [b] æquales duobus rectis. Ergo A B C B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque B A C A C B itemque C A B A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

[a] 16. hujus.
[b] 13. hujus.

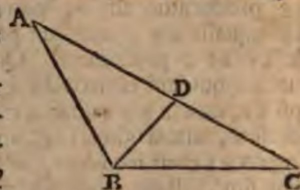


PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum A B C habens latus A C latere A B majus. Dico, & A B C angulum angulo B C A majorem esse. Quoniam enim A C major est, quam A B, ponatur ipsi A B æqualis A D; & B D jungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus est A D B, erit is major [a] interiore, & opposito D C B. Sed A D B æqualis [b] est ipsi A B D, quod & latus A B lateri A D sit æquale, major igitur est & A B D angulus angulo A C B quare A B C ipso A C B multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

[a] 16. hujus.
[b] 5. hujus.

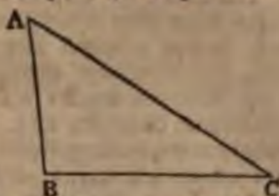


PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum A B C majorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico & latus A C latere A B majus esse. Si enim non

non eſt majus, vel AC eſt æquale ipſi AB, vel ipſo minus, æquale igitur non eſt, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis [a] eſſet; non eſt autem. Non igitur AC ipſi AB eſt æquale. Sed neque minus. eſſet enim & angulus ABC angulo ACB minor [b]. atqui non eſt, non igitur AC minus eſt ipſo AB. Oſtenſum autem eſt neque æquale eſſe: ergo AC ipſo AB eſt majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus ſubtendit. Quod oportebat demonſtrare.



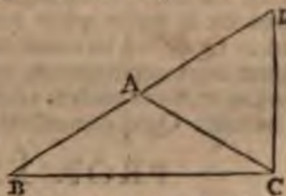
a 5. hujus

b 18. hujus

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocunque ſumpta.

Sit enim triangulum ABC. Dico ipſius ABC trianguli duo latera reliquo majora eſſe, quomodocunque ſumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC; latera vero AB BC majora latere AC; & latera BC CA majora ipſo AB. producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipſi CA æqualis AD [a]; & DC jungatur. quoniam igitur DA eſt æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis [b]. Sed BCD angulus major eſt angulo ACD. Angulus igitur BCD angulo ADC eſt major; Et quoniam triangulum eſt DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC; majorem autem angulum majus latus ſubtendit [c]: erit latus DB latere BC majus. ſed DB eſt æquale ipſis BA AC. quare latera BA AC ipſo BC majora ſunt. ſimiliter oſtendemus, & latera quidem AB BC majora eſſe latere CA: latera vero BC CA ipſo AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocunque ſumpta. Quod oſtendere oportebat.



a 3. hujus

b 5. hujus

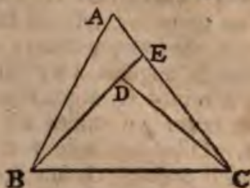
c 19. hujus

PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra conſtituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

 Trian-

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis BC duæ rectæ lineæ intra conſtituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem eſſe, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. producatur enim BD ad E. & quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ſunt majora, [a] erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo BA AC ipſis BE EC majora [b] ſunt. rurſus quoniam CED trianguli duo latera CE ED ſunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipſis CD DB ſunt majora [b]. Sed oſtenſum eſt BA AC majora eſſe BE EC. multo igitur BA AC ipſis BD DC majora ſunt. rurſus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & oppoſito eſt major [c]: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipſo CED. Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipſo BAC eſt major [c] ſed angulus BDC oſtenſus eſt major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare ſi à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra conſtituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonſtrare oportebat.

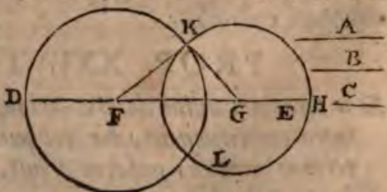


[a] 20. hujus.
[b] Axiom. 4.
[c] 16. hujus.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales ſunt, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua majores eſſe, quomodocunque ſumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quodomocunque ſumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliqua majores ſint, quomodocunque ſumptæ, ut ſcil. A, B, quidem ſint majores quam C, A, C, vero majores quam B, & præterea B, C, majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipſis A, B, C, triangulum conſtituere. exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E, & ponatur



ponatur ipsi quidem A æqualis [a] DF, ipsi vero B æqualis FG, & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus [b] describatur DKL. rursusque centro G, & intervallo GH alius circulus KLH describatur, & jungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C, triangulum KFG constitutum esse, quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis [c] FK. sed FD est æqualis A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis [c] GK. sed GH est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem & FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus A, B, C, æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

[a] 3. hujus

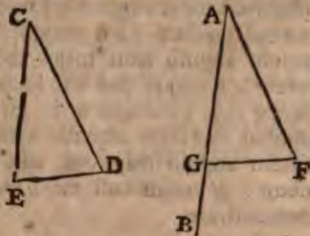
[b] 3. Postul.

[c] Def. 15.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere,

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum constituere. sumantur in utraque ipsarum CD CE quævis puncta D, E, ducaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD DE EC triangulum [a] constituatur AFG, ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt, altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit & angulus DCE angulo FAG æqualis [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG. Quod facere oportebat.



[a] 22. hujus

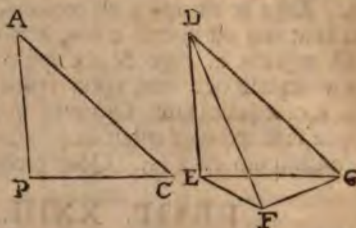
[b] 8. hujus

PROP. XXIV. PROBL.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem,

rem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE; latus vero AC æquale DF: At angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. quoniam enim angulus BAC major est angulo



23. hujus. EDF, constituatur [a] ad rectam lineam DE, & ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis an-

3. hujus. gulus EDG, ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis [b] DG, & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG, duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis angu-

4. hujus. lo EDG. ergo basis BC basi EG est [c] æqualis. rursus quoniam æ-

5. hujus. qualis est DG ipsi DF; est angulus DFG angulo DGF [d] æqualis: erit itaque DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. & quoniam triangulum est EFG, angulum EFG majorem habens angulo EGF; majori

19. hujus. autem angulo latus majus subtenditur [e]; erit & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

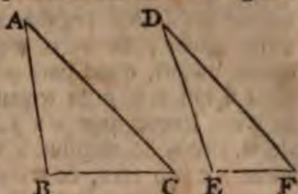
PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem: & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF: basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis [a]. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset [b] & basis BC basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 4. hujus
[b] 24. hujus

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus sc. AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est [a] æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui



[a] 4. hujus.

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo G C B angulus eſt æqualis angulo D F E. ſed angulus D F E angulo B C A æqualis ponitur. quare, & B C G angulus angulo B C A eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur inæqualis eſt A B ipſi D E. ergo æqualis erit. eſt autem, & B C æqualis E F. Itaque duæ A B B C duabus D E E F æquales ſunt, altera alteri, & angulus A B C æqualis angulo D E F. Baſis

a 4. hujus. igitur A C baſi [a] D F, & reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Sed rurſus ſint latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur æqualia, ut A B ipſi D E. Dico rurſus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia eſſe; A C quidem ipſi D F, B C vero ipſi E F: & adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis eſt B C ipſi E F, una ipſarum major eſt. Sit major B C, ſi fieri



poteſt, ponaturque B H æqualis E F, & A H jungatur. Quoniam igitur B H quidem eſt æqualis E F, A B vero ipſi D E; duæ A B B H duabus D E E F æquales ſunt, altera alteri, & angulos æquales continent; ergo [a] baſis A H baſi D F eſt æqualis: & A B H triangulum triangulo D E F & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Æqualis igitur eſt angulus B H A angulo E F D. ſed E F D eſt æqualis [b] angulo B C A. Ergo, &

b ex hyp. B H A angulus angulo B C A eſt æqualis. trianguli igitur A H C exterior angulus B H A æqualis eſt interiori & oppoſito B C A, quod fieri non poteſt [c]. quare non inæqualis

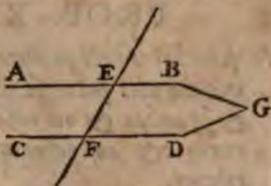
c 16. hujus. eſt B C ipſi E F. æqualis igitur. eſt autem, & A B æqualis D E. duæ igitur A B B C duabus D E E F æquales ſunt, altera alteri: anguloſque æquales continent. quare baſis A C æqualis eſt baſi D F, & A B C triangulum triangulo D E F, & reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. Quod oporebat demonſtrare.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter se faciat. dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B, C D, vel ad partes B D convenient, vel ad partes A C. producantur, conveniantque ad partes B D in puncto G. itaque G E F trianguli exterior angulus A E F major [a] est interiore & opposito E F G. sed & æqualis [b], quod fieri non potest. non igitur A B C D productæ ad partes B D convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes A C. quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ [c] inter se sunt. parallela igitur est A B ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.

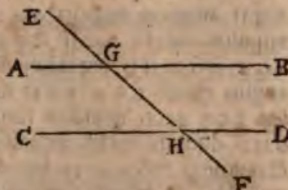


[a] 16. huj
[b] ex hyp
[c] Def. 3

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori, & opposito G H D æqualem faciat; vel interiores & ad easdem partes B G H G H D, duobus rectis æquales. dico rectam lineam A B rectæ C D parallelam esse. Quoniam enim E G B angulus æqualis est [a] angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H [b], erit & angulus A G H angulo G H D æqualis: & sunt alterni. parallela igitur est A B ipsi C D [c]. rursus quoniam anguli B G H G H D duobus rectis sunt æquales [a], & sunt A G H B G H æ-



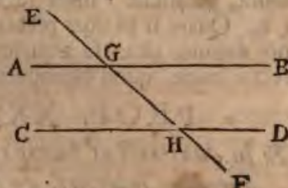
[a] Ex hy
[b] 15. hu
[c] Ex antecedente.

d 13. hujus. quales duobus rectis d: erunt anguli A G H B G H angulis B G H G H D æquales. communis auferatur B G H. reliquus igitur A G H est æqualis reliquo G H D: & sunt alterni. ergo A B ipsi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas A B C D recta linea incidat E F. dico alternos angulos A G H G H D inter se æquales efficere, & exteriorem E G B interiori, & opposito, & ad easdem partes G H D æqualem: & interiores, & ad easdem partes B G H G H D duobus rectis æquales. si enim inæqualis est A G H ipsi G H D, unus ipsorum major est. sit major A G H. & quoniam A G H angulus major est angulo G H D; communis apponatur B G H. anguli igitur A G H B G H angulis B G H G H D majores sunt.



a 13. hujus. sed anguli A G H B G H sunt æquales duobus rectis a. ergo B G H G H D anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur

b Axiom. 12. rectæ lineæ, inter se conveniunt b. ergo rectæ lineæ A B C D in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis est A G H angulus angulo G H D. quare necessario est æqualis.

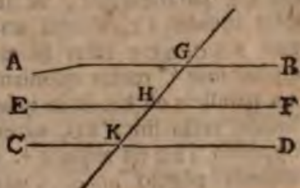
c 15. hujus. angulus autem A G H æqualis est angulo E G B c. ergo, & E G B ipsi G H D æqualis erit. communis apponatur B G H. anguli igitur E G B B G H sunt æquales angulis B G H G H D. sed E G B B G H æquales sunt duobus rectis: Ergo, & B G H G H D duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD ipsi EF parallela. dico & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis [a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD [a]. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [b]. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.



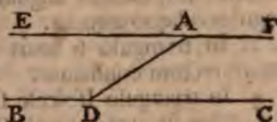
a 29. huju[s]

b 27. huju[s]

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturque [a] ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE: & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit [b]. per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. quod facere oportebat.



a 23. huju[s]

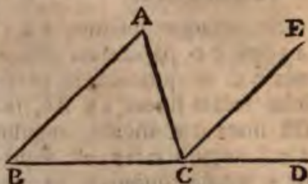
b 27. huju[s]

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum A B C: & unum ipſius latus B C in D producatur. dico angulum exteriorem A C D duobus interioribus, & oppoſitis C A B A B C æqualem eſſe; & trianguli tres interiores angulos A B C B C A C A B duobus rectis eſſe æqua-
a 31. hujus. les. ducatur a enim per punctum C ipſi A B rectæ lineæ parallela C E. & quoniam A B ipſi C E parallela eſt, & in ipſas incidit A C, alterni anguli B A C A C E inter ſe æquales ſunt b. rurſus quoniam A B parallela eſt C E & in ipſas



incidit recta linea B D, exterior angulus E C D interiori &
b 29. hujus. oppoſito A B C eſt æqualis b. oſtenſus autem eſt angulus A C E æqualis angulo B A C. quare totus A C D exterior angulus æqualis eſt duobus interioribus, & oppoſitis B A C A B C. communis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B tribus A B C B A C A C B æquales ſunt. ſed anguli A C D A C B ſunt
c 13. hujus. æquales c duobus rectis. ergo & A C B C B A C A B duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppoſitis eſt æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt. Quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIA.

1. Omnes tres anguli cujuſque trianguli ſimul ſumpti æquales ſunt tribus angulis cujuſque alterius trianguli ſimul ſumptis.

2. Si in uno triangulo duo anguli aut ſinguli aut ſimul æquales ſint duobus angulis alterius trianguli, erit reliquus angulus reliquo æqualis.

3. In triangulo ſi unus angulus rectus ſit, reliqui ſimul unum rectum conficiunt.

4. In triangulo Iſoſcele ſi angulus æquis cruribus contentus rectus ſit, reliqui ad baſim ſunt ſemirecti.

5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis eſt $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEOREMA.

Omnes ſimul interiores anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficient bis tot rectos demptis quatuor quot ſunt latera figuræ.

Nam figura unaquæque rectilinea reſolvi poteſt in triangula binario pauciora quam ſunt ipſius figuræ latera, V. G. *ſi quatuor latera habeat reſolvitur in duo triangula, ſi quinque in tria*

tria triangula, si sex in quatuor, & sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

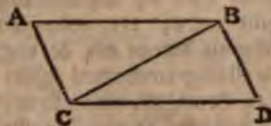
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex precedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ, quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ AB CD: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC BD. dico AC BD æquales, & parallelas esse. ducatur enim BC & quoniam AB parallela est CD, in ipsasque incidit BC; alterni anguli ABC BCD æquales sunt [a]. rursus quoniam AB est æqualis CD, communis autem BC, duæ AB BC duabus BC CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD. basis igitur AC basi BD est æqualis [b]: triangulumque ABC triangulo BCD: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB CBD æquales



a 29. huj.

b 4. huj.

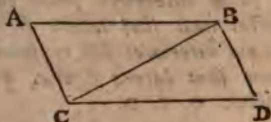
27. hujus. les inter se efficit, parallela est AC ipsi BD[c], Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Defin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt [a]. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt



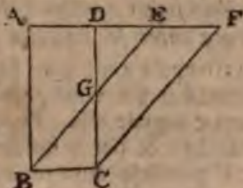
29. hujus. inter se [a]. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, scil. quod
26. hujus. est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, [b] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem, æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD, angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam secare. quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri & angulus ABC æqualis est angulo BCD.
4. hujus. basis igitur [c] AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF BC constituta. dico ABCD parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, æqualis [a] est AD ipsi BC. eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC. quare &, AD ipsi EF æqualis erit [b]: & communis DE. tota igitur AE [c] toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC. ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori [d], basis igitur EB basi FC est [e] æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF est æquale [f]. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.



a 34. hujus.
b Axiom. 1.
c Axiom. 2.
d 29. hujus.
e 4. hujus.
f Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt,

Sint parallelogramma ABCD EFGH super æqualibus basibus BC FG, & in eisdem parallelis AH BG constituta. dico parallelogrammum ABCD parallelelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim BE CH. & quoniam æqualis [a] est BC ipsi FG & FG æqualis ipsi EH; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas conjungunt BE CH. quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ sunt [b]. ergo EB, CH & æquales sunt, & parallelæ: quare EBCH parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo ABCD [c]; basim enim eandem habet BC, &



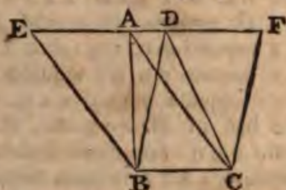
a Hyp.
b 33. hujus.
c 35. hujus.

& in eiſdem parallelis B C, A D conſtituitur. ſimili ratione, & E F G H parallelogrammum eidem parallelogrammo E B C H eſt æquale. ergo parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale erit. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.

Sint triangula A B C D B C ſuper eadem baſi B C, & in eiſdem parallelis A D B C conſtituta. dico A B C triangulum triangulo D B C æquale eſſe. Producatur A D ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipſi C A parallela ducatur B E,

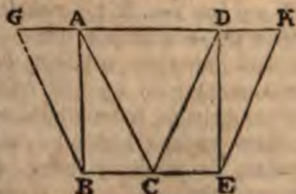


a 31. hujus. [a] per C vero ipſi B D parallela C F. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum E B C A D B C F, & parallelogrammum
c 35. hujus. E B C A eſt æquale [c] parallelogrammo D B C F, etenim ſuper eadem ſunt baſi B C, & in eiſdem parallelis B C E F: eſtque pa-
b 34. hujus. rallelogrammi quidem E B C A dimidium [b] A B C triangulum, cum diameter A B ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero D B C F dimidium [b] triangulum D B C; diameter enim D C
c Axiom. 7. ipſum bifariam ſecat. quæ autem [c] æqualium dimidia ſunt inter ſe æqualia ſunt. ergo triangulum A B C triangulo D B C eſt æquale. Triangula igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula ſuper baſibus, æqualibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Sint triangula A B C D C E ſuper æqualibus baſibus, B C C E & in eiſdem parallelis B E A D conſtituta. dico A B C triangulum D C E triangulo æquale eſſe. Producatur enim A D ex utraque parte in G, H puncta: & per B quidem ipſi C A parallela ducatur B G [a]: per E vero duca-



a 31. hujus. tur E H parallela ipſi D C [a]. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum G B C A D C E H. atque

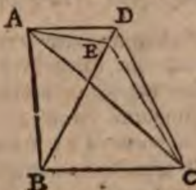
atque est parallelogrammum GBCA æquale [b] parallelogrammo DCEH: in æqualibus enim sunt basibus BC CE, & in eisdem BE GH parallelis. parallelogrammi vero GBCA dimidium [c] est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. & parallelogrammi DCEH dimidium [c] est triangulum DCE, diameter enim DE ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia sunt [d], inter se æqualia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DCE est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

[b] 36. hujus.
[c] 34. hujus.
[d] Axiom. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC DBC super eadem basi BC constituta, & ad easdem partes. dico, & in eisdem parallelis esse. ducatur enim AD. dico AD parallelam esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur [a] per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE, & EC ducatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC [b], super eadem enim est basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis. sed ABC triangulum triangulo DBC [c] est æquale. ergo & triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AE ipsi BC parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam AD, ergo AD ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



[a] 31. hujus.
[b] 37. hujus.
[c] Ex hyp.

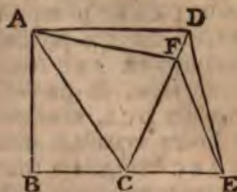
PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC CDE super æqualibus basibus BC CE constituta. dico etiam in eisdem esse parallelis. ducatur enim AD. dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi BE parallela AF, [a] & FE ducatur.

[a] 31. hujus.

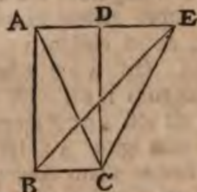
b 38. hujus. catur. triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale b, cum super æqualibus basibus & in eisdem parallelis B E A F constituantur. sed triangulum A B C æquale est triangulo D C E. ergo & triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur A F ipsi B E est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter A D. ergo A D ipsi B E parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim A B C D, & triangulum E B C, basim habeant eandem B C, & in eisdem sint parallelis B C A E. dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. Jungatur enim A C. triangulum igitur A B C triangulo
a 37. hujus. E B C est æquale a; namque super eadem basi B C, & in eisdem B C A E parallelis constituuntur. sed A B C D parallelogrammum duplum est trian-
b 34. hujus. guli A B C b, cum diameter A C ipsum bifariam secet. quare & ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet, dato triangulo A B C æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

secetur

ſecetur BC bifariam [a] in E, & juncta AE, ad rectam lineam EC, atque ad punctum in ea E, conſtituatur angulus [b] CEF æqualis ipſi D: & per A quidem ipſi EC parallela ducatur [c] AG; per C vero ipſi FE ducatur parallela [c] CG. parallelogrammum igitur eſt FECG. & quoniam BE eſt æqualis EC, erit & ABE triangulum [d] triangulo AEC æquale, ſuper æqualibus enim ſunt baſibus BE EC, & in eiſdem BC AG parallelis. ergo triangulum ABC trianguli AEC eſt duplum. eſt autem, & parallelogrammum FECG duplum [e] trianguli AEC; baſim enim eandem habet, & in eiſdem eſt parallelis. æquale igitur eſt FECG parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt, in angulo CEF, qui angulo D eſt æqualis. Quod quidem facere oportebat.

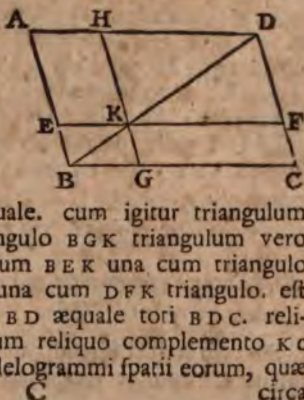


a 10. hujus.
b 23. hujus.
c 31. hujus.
d 38. hujus.
e 41. hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi ſpatii eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipſam BD parallelogramma quidem ſint FH EG, quæ vero complementa dicuntur AK KC. dico AK complementum complemento KC æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt ABCD, & ejus diameter BD, æquale [a] eſt ABD triangulum triangulo BDC. rurſus quoniam HKFD parallelogrammum eſt, cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale [a] erit. eadem ratione, & triangulum KGB triangulo KEB eſt æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale ſit triangulo BGK triangulum vero HDK ipſi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. eſt autem & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC eſt æquale. Ergo omnis parallelogrammi ſpatii eorum, quæ circa



a 34. hujus.

circa diametrum sunt parallelogrammorum complementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur triangulo C æquale [a] parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui est æqualis D. & ponatur B E in directum ipsi A B, producaturque F G ad H: & per A alterutri ipsarum B G E F parallela [b] ducatur A H, & H B jungatur. quoniam igitur in parallelas A H E F recta linea H F incidit, anguli A H F H F E duobus rectis æquales [c] sunt. quare B H F H F E duobus rectis sunt minores. quæ vero à minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur, conveniunt [d] inter se. ergo H B F E productæ convenient. producantur, & conveniant in K: perque K alterutri ipsarum E A F H parallela [b] ducatur K L, & A H G B ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cujus diameter H K, & circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero quæ complementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est [e] æquale. sed, & B F æquale est triangulo C. quare, & L B triangulo C æquale erit. & quoniam G B E angulus æqualis [f] est angulo A B M, sed & æqualis angulo D, erit & angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat.

[a] 42. hujus.
[b] 31. hujus.
[c] 29. hujus.
[d] Axio. 12.
[e] 43. hujus.
[f] 15. hujus.

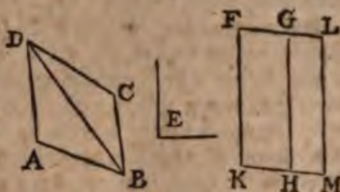


PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum A B C D, datus vero angulus rectilineus E. oportet rectilineo A B C D æquale parallelogrammum

mum conſtituere in angulo ipſi E æquali. Conjungantur enim DB, & conſtituatur triangulo ADB æquale [a] parallelogrammum FH: in angulo HKF, qui eſt æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale [b] parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E eſt æqualis. & quoniam angulus E æqualis eſt utrique ipſorum HKF GHM, erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG, anguli igitur HKF KHG angulis KHG GHM æquales ſunt. ſed HKF KHG ſunt æquales [c] duobus rectis. ergo, & KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad eaſdem partes poſitæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur [d] eſt KH ipſi HM. & quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales [c] ſunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL, angulis HGF HGL ſunt æquales. at anguli MHG HGL æquales [c] ſunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. in directum [d] igitur eſt FG ipſi GL. & quoniam KF ipſi HG & æqualis eſt, & parallela, ſed & HG ipſi ML; erit KF [e] ipſi ML & æqualis, & parallela. ipſaſque conjungunt rectæ lineæ KM FL. ergo & KM FL æquales [f] & parallelæ ſunt. parallelogrammum igitur eſt KFLM. at cum triangulum quidem ABD æquale ſit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtitutum eſt KFLM in angulo FKM, qui eſt æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.



a 42. hujus.
b 44. hujus.
c 29. hujus.
d 14. hujus.
e 30. hujus.
f 35. hujus.

Cor. Ex jam dictis manifeſtum eſt, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari poſſit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum deſcribere.

Sit data recta linea AB. oportet ſuper ipſa AB quadratum deſcri-

a 11. hujus. b 3. hujus. c 31. hujus. defcribere. Ducatur a rectæ lineæ A B à puncto in ea dato A ad rectos angulos A C; & ipfi A B æqualis b ponatur A D; perque punctum D ducatur c D E ipfi A B parallela, & per B ipfi A D parallela c ducatur B E. parallelogrammum igitur eft A D E B. & A B quidem eft d æqualis D E,

d 34. hujus. A D vero ipfi d B E. fed B A ipfi A D eft æqualis. quatuor igitur B A A D D E E B inter fe æquales funt, ideoque æquilaterum eft A D E B parallelogrammum. dico etiam rectangulum effe. quoniam enim in parallelas A B D E recta linea incidit A D,

e 29. hujus. anguli B A D A D E duobus rectis funt e æquales. rectus autem eft B A D, ergo, & A D E rectus erit. parallelogrammorum vero fpatiorum, quæ ex oppofito funt la-

f 34. hujus. tera, & anguli f inter fe æqualia funt. rectus igitur eft uterque oppofitorum A B E B E D angulorum: & ob id rectangulum eft A D E B. Oftenfum autem eft æquilaterum effe. Quadratum igitur fit neceffe eft, atque eft fuper recta linea A B defcriptum. Quod ipfum facere oportebat.



Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum eft rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

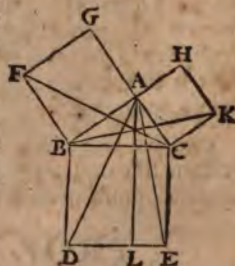
In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum fubtendente defcribitur, quadratum æquale eft quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus defcribuntur.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. dico quadratum defcriptum à recta B C æquale effe quadratis, quæ ab ipfis B A A C defcribuntur. defcribatur a enim à B C quidem quadratum B D E C, ab ipfis

a 46. hujus. B A A C quadrata a G B H C, perque A alterutri ipfarum B D C E parallela ducatur A L; & A D F C jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum B A C

b Def. 30. B A G rectus b eft, ad aliquam rectam lineam B A, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ A C A G non ad eafdem partes pofitæ, angulos qui deinceps funt duobus rectis æquales

c 14. hujus. efficiunt. in directum igitur c eft C A ipfi A G. eadem ratione, & A B ipfi A H eft in directum. & quoniam angulus



D B C

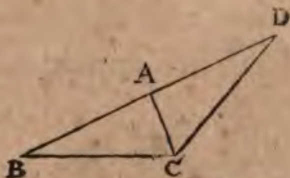
DBC eſt æqualis angulo FBA, rectus enim uterque eſt, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC eſt d æqualis. quòd cum duæ AB BD duabus FB BC æquales d ſint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & baſis AD baſi FC æqualis e, & ABD triangulum triangulo FBC æquale. eſtque f trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, baſim enim eandem habent BD, & in eiſdem BD AL ſunt parallelis: trianguli f vero FBC duplum eſt GB quadratum, rurſus enim baſim habent eandem FB, & in eiſdem ſunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter ſe æqualia g ſunt. ergo æquale eſt parallelogrammum BL ipſi GB quadrato. ſimiliter junctis AE BK, oſtendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB HC eſt æquale. & deſcribitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipſis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC deſcriptum æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod deſcribitur à latere rectum angulum ſubtendente æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. Quod oportebat demonſtrare.

d Axiom. 2.
e 4. hujus.
f 41. hujus.
g Axiom. 6.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod deſcribitur ab uno laterum trianguli, æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC deſcribitur quadratum æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC deſcribuntur, dico angulum BAC rectum eſſe. ducatur enim à puncto A ipſi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipſi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA eſt æqualis AB, erit & quadratum quod deſcribitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia ſunt quadratis quæ ex BA AC deſcribuntur. ſed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale a eſt quod ex DC quadratum; rectus enim angulus eſt DAC: quadratis



a 47. hujus.

dratis vero, quæ ex B A A C æquale ponitur quadratum, quod ex B C: quadratum igitur, quod ex D C æquale eſt ei, quod ex B C quadrato. ergo & latus D C lateri C B eſt æquale. & quoniam D A eſt æqualis A B, communis autem A C, duæ D A A C æquales ſunt duabus B A A C; & baſis D C eſt æ-
[b] 8. hujus. qualis baſi C B. angulus [b] igitur D A C angulo B A C eſt æqualis. rectus autem eſt D A C. ergo & B A C rectus erit. Si igitur quadratum quod deſcribitur ab uno laterum trianguli, æquale ſit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonſtrare.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

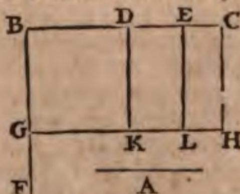
II.

Omnis parallelogrammi ſpatii, unumquodvis eorum quæ circa diametrum ipſis ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum ſub duabus rectis lineis contentum æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub recta linea inſecta, & ſingulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & ſecta ſit BC utcunque in punctis D, E. dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum æquale eſſe rectangulo quod continetur ſub A & BD, & rectangulo quod ſub A & DE, & ei quod ſub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipſi BC ad rectos [a] angulos BF: atque ipſi A ponatur [b] æqualis BG: & per G quidem



[a] 11. pri.
[b] 3. pri.

31.primi. quidem ipsi BC parallela c ducatur GH: per D, E, C vero ducantur DK EL CH parallelæ c ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB BC; & BG ipsi A est æqualis, rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur



enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A; & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum est æquale eis quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus, continentur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula, quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C, dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub AB AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

46.primi. describatur a enim ex AB quadratum ADEB, & per C ducatur b alterutri ipsarum AD

31.primi. BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA



AC; etenim sub DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis; & rectangulum CE continetur sub AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub AB & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

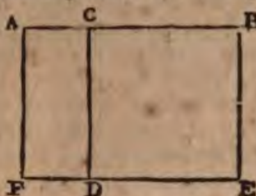
PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C. dico sub AB & BC rectangulum æquale esse rectangulo sub AC BC unà cum quadrato, quod fit ex BC. describatur [a] enim ex BC quadratum CDEB; producaturque ED in F: & per A alterutri ipsarum CD BE parallela [b] ducatur AF. æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD CE: & est AE quidem rectangulum contentum sub AB BC; etenim sub AB BE continetur, quarum BE est æqualis BC: rectangulum vero AD est quod continetur sub AC CB, cum DC ipsi CB sit æqualis: & DB est quadratum, quod fit ex BC. ergo rectangulum sub AB BC est æquale rectangulo sub AC CB unà cum quadrato quod ex BC. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

[a] 46.primi.
[b] 31.primi.

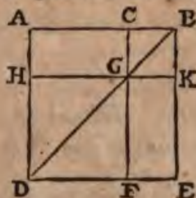


PROP. IV. THEOR.

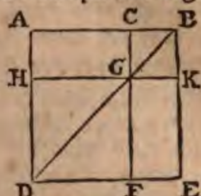
Si recta linea secta fuerit utcunque; quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. dico quadratum quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC CB & ei rectangulo quod bis sub AC CB continetur. Describatur [a] enim ex AB quadratum ADEB, jungaturque BD, & per C quidem alterutri ipsarum AD BE parallela [b] ducatur CGF; per G vero alterutri ipsarum AB DE ducatur [b] parallela HK. & quoniam CF est parallela ipsi AD, & in ipsas incidit BD: erit exterior angulus BGC interiori & opposito ADB æqualis [c]: angulus

[a] 46.primi.
[b] 41.primi.
[c] 29.primi.



5. primi. angulus autem ADB est æqualis *d* angulo ABD, quod & latus BA æquale est lateri AD. quare CGB angulus angulo
6. primi. GBC est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale *e*.
34. primi. sed & latus CB æquale *f* est lateri GK & CG ipsi BK. ergo & GK est æquale KB, & CGKB æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim CG est parallela ipsi BK & in ipsas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis sunt æquales *c*. rectus autem est KBC angulus. ergo & rectus GCB, & anguli oppositi CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit & æquilaterum esse, quadratum igitur est CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione & HF est quadratum quod fit ex HG, hoc est ex AC. ergo HF CK ex ipsis AC CB quadrata sunt. &



43. primi. quoniam rectangulum AG est æquale *g* rectangulo GE; atque est AG quod sub AC CB continetur, est enim GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur sub AC CB, quare rectangula AG GE æqualia sunt ei quod bis sub AC CB continetur. sunt autem & HF CK quadrata ex AC CB. quatuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo, sunt æqualia; sed HF CK AG GE componunt totum ADEB quadratum quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale est & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo. Quare si recta linea utcunque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis sub partibus continetur. atque illud est quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc perspicue constat, in quadratis spatiis parallelogramma quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D, dico rectangulum contentum sub AD BD, una cum quadrato quod fit ex

CD

CD æquale esse ei quod ex CB fit quadrato. Describatur [a] enim ex BC quadratum CEFB: ducaturque BE: & per D quidem alterutri ipsarum CE BF parallela [b] ducatur DHG; per H vero ducatur ALK parallela [b] alterutri ipsarum CB EF: & rursus per A ducatur alterutri CL BO parallela [b] AK. & quoniam CH complementum æquale [c] est complemento HF, commune apponatur DO, totum igitur CO toti DF est æquale. sed CO est æquale [d] AL, quoniam & AC ipsi CB. ergo & AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD DL æquale erit. sed AH quidem est quod sub AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est æqualis [e]; FD DL vero est gnomon MNX. igitur MNX æqualis est ei quod sub AD DB continetur, commune apponatur LG, æquale [e] scilicet quadrato quod ex CD, ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB. ergo rectangulum sub AD DB, una cum quadrato quod ex CD, æquale est ei quod ex CB fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

a 46.pr

b 31.pr

c 43.pr

d 43.pr

e Cor. 4 hujus.

A C D B N M O K L H X E G F

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea quævis AB secetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipsi in directum BD. dico rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale esse ei quod fit ex CD quadrato. Describatur [a] enim ex CD quadratum GEFD, & jungatur DE; per B alterutri ipsarum CE DF parallela [b] ducatur BHG: & per H ducatur KLM parallela [b] alterutri

a 46.pr

b 31.pr

alterutri ipsarum A D E F; & adhuc per A alterutri C L D M parallela [b] A K. Itaque quoniam A C est æqualis C B, erit & rectangulum A L rectangulo
.primi. C H æquale [c]. sed C H æquale
.primi. [d] est H F. ergo & A L ipsi H F æquale erit. commune apponatur C M. totum igitur A M gnomoni N X O est æquale. atque est A M, quod sub A D D B
r. 4. continetur, etenim D M est [e] æ-
s. qualis D B. ergo & gnomon N X O æqualis est rectangulo sub A D D B. rursus commune apponatur L G, æquale [e] scilicet quadrato quod ex C B. rectangulum igitur sub A D D B unà cum quadrato quod ex B C æquale est gnomoni N X O & ipsi L G. sed gnomon N X O, & L G componunt C E F D quadratum, quod quidem fit ex C D. ergo rectangulum sub A D D B unà cum quadrato ex B C æquale est ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea, quæ ex dimidia & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod a reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit utcunque in puncto C. dico quadrata ex A B B C æqualia esse, & rectangulo quod bis sub A B B C continetur, & ei quod fit ex A C quadrato. De-
.primi. scribatur [a] enim ex A B quadratum A D E B, & figura construatur *. Itaque quoniam A G rect-
.primi. angulum æquale [b] est rectangulo

* *Figura dicitur construi, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, & duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, & quatuor complementa.*

GE.

GE, commune apponatur CF; quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. sed AF CE sunt LKM gnomon, & quadratum CF; ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id, quod bis sub AB BC continetur, duplum ipsius AF; etenim BF est [c] æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod est ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur, & quadrato ex AC. sed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB BC continetur unà cum eo quod fit ex AC quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt rectangulo quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato. quod ostendere oportebat.

c Cor. 4. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. dico rectangulum quater sub AB BC contentum unà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. quoniam igitur CB est [a] æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis [b]; BD vero ipsi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis. & quoniam CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum [c] quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale [c]. sed CK est [d] æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est GR, & quatuor rectangula



a hyp.
b 34. primi.
c 36. primi.
d 43. primi.

rectangula BN KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autem & PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi



43.primi. RF æquale erit. sed MP est æquale PL, complementa enim sunt ML parallelogrammi; quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt, & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon STY quadruplus ipsius AK. quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est *e* æquale. ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater sub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub toto, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.

e Cor. 4. hujus.

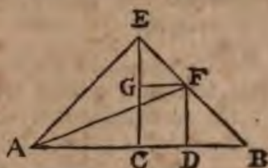
PROP. IX. THEOR.

Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur *a* enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipsarum

a 11.primi.

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipsi CE parallela [b] ducatur DF; per F vero ipsi AB parallela [b] FG; & AF ducatur. Itaque quoniam AC est æqualis CE; erit [c] & angulus EAC angulo AEC æqualis. & cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales [d] erunt. & sunt æquales inter sese. utervis igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est utervis ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. & quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF, æqualis enim [e] est interiori & opposito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare & latus EG lateri GF est [f] æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori & opposito ECB; reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis est angulo BFD; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC est æqualis CE, erit & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale [g] est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale [g] est quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis [h] autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati CD. sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale [g] est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata, dupla sunt & quadrati dimidæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur. Quod ostendere oportebat.



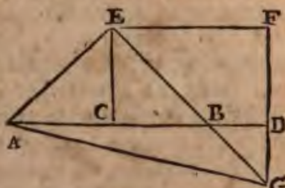
[b] 31. primi.
[c] 5. primi.
[d] 3. Cor. 32. primi.
[e] 29. primi.
[f] 6. primi.
[g] 47. primi.
[h] 34. primi.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea A B secetur bifariam in C, & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea B D. dico quadrata ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla esse. Ducatur enim à
a 11.primi. puncto C ipsi A B ad rectos [a] angulos C E, & utrivis ipsarum A C C B æqualis ponatur; ducaturque A E E B, & per E qui-
b 31.primi. dem ipsi A D parallela [b] ducatur E F; per D vero ducatur D F parallela [b] ipsi C E. & quoniam in parallelas E C F D recta
c 29.primi. quædam linea E F incidit, anguli C E F E F D æquales [c] sunt duobus rectis. anguli igitur F E B E F D duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus quam sunt duo recti in infinitum producuntur, con-
d Axio. 12. veniunt inter se [d]. ergo E B F D productæ ad partes B D convenient. producantur, & conveniant in puncto G, & A G ducatur. itaque quoniam A C est æqualis C E, & angulus A E C angulo E A C æqualis



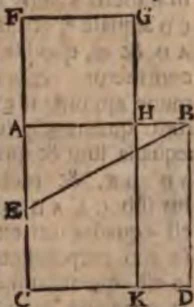
e 5. primi. [e] erit: atque est rectus qui ad C. uterque igitur ipsorum C A E A E C est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque C E B E B C. ergo A E B est rectus. &
f 15.primi. quoniam E B C est dimidium recti, erit & recti [f] dimidium D B G; cum sit ad verticem sed & B D G rectus est; etenim est [c] æqualis ipsi D C E alterno. reliquus igitur D G B dimidium est recti, & ob id ipsi D B G æqualis. ergo & latus B D
g 6. primi. æquale [g] lateri D G. rursus quoniam E G F est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus F E G recti dimidium, & æqualis ipsi E G F. quare & latus G F lateri E F est æquale [g]. & cum E C sit æqualis C A; & quadratum ex E C æquale est ei quod ex C A fit quadrato. ergo quadrata ex E C C A dupla
h 47.primi. sunt quadrati ex C A. quadratis autem ex E C C A æquale [h] est quadratum ex E A. quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum. rursus quoniam G F est æqualis F E, æquale est, & ex G F quadratum quadrato ex F E. quadrata igitur ex G F F E quadrati ex E F sunt dupla. at quadratis ex G F F E æquale est,

eſt *b* quod ex E G quadratum. ergo quadratum ex E G duplum eſt quadrati ex E F. æqualis autem eſt E F ipſi C D. quadratum igitur ex E G quadrati ex C D duplum erit. ſed oſtenſum eſt quadratum ex E A duplum quadrati ex A C. ergo ex A E E G quadrata, quadratorum ex A C C D ſunt dupla. quadratis vero ex A E E G æquale eſt *b* quod ex A G quadratum. quadratum igitur ex A G duplum eſt quadratorum ex A C C D. at quadrato ex A G æqualia *b* ſunt ex A D D G quadrata. ergo quadrata ex A D D G ſunt dupla quadratorum ex A C C D. ſed D G eſt æqualis D B. quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D ſunt dupla. Ergo ſi recta linea bifariam ſecetur, & ipſi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata, dupla ſunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia & adjecta conſtat tanquam ab una linea deſcribitur. Quod oſtendere oportebat. *b* 47.primi.

PROP. XI. THEOR.

Datam rectam lineam ſecare, ita ut quod ſub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea A B. oportet ipſam A B ita ſecare, ut quod ſub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Deſcribatur *a* enim ex A B quadratum A B C D, ſeceturque A C bifariam in E, & B E ducatur: deinde producta C A in F, ponatur ipſi B E æqualis E F: deſcribaturque ex A F quadratum F G H A, & G H ad K producatur. dico A B ſectam eſſe in H, ita ut ſub A B B H rectangulum æquale ſit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam ſecatur in E, adjiciturque ipſi in directum A F, rectangulum ſub C F F A, una cum quadrato ex A E, æquale *b* erit quadrato ex E F. ſed E F eſt æqualis E B. rectangulum igitur ſub C F F A, una cum quadrato ex A E æquale eſt ei, quod fit ex E B, quadrato. quadrato autem ex E B æqualia ſunt *c* quadrata ex B A A E: etenim angulus ad A rectus eſt. ergo rectangulum ſub C F F A, una cum quadrato ex A E æquale eſt quadratis ex A B A E; commune auferatur quod ex A E fit quadratum; reliquum igitur rectangulum ſub C F F A æquale eſt quadrato ex A B. eſt autem rectangulum F K ſub C F F A *a* 46.primi *b* 6. hujus. *c* 47.primi.



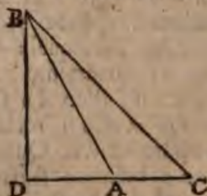
D

CF FA; siquidem AF est æqualis FG; quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum habens BAC: & ducatur [a] à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcunque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale [b], & quadratis ex CA AD, & ei, quod bis sub CA AD continetur, rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est [c] quadratum ex CB, rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex AD DB æquale est [c] quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo, quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum



a 12. primi.
b 4. hujus.
c 47. primi.

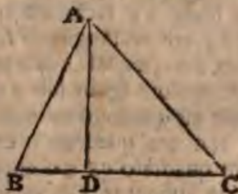
sum

sum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum A B C, acutum habens angulum ad B: ducatur à puncto A [a] ad B C perpendicularis A D. dico quadratum quod fit ex A C minus esse quam quadrata quæ ex C B B A fiunt, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. Quoniam enim recta linea C B secta est utcunque in D, erunt quadrata ex C B B D æqualia [b], & rectangulo quod bis sub C B B D continetur, & quadrato ex D C. commune apponatur ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, & rectangulo bis sub C B B D contento, & quadratis ex A D D C. sed quadratis ex B D D A æquale est [c] ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C æquale [c] est quadratum ex A C, quadrata igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, & ei quod bis sub C B B D continetur rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quam quadrata ex C B B A, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat.

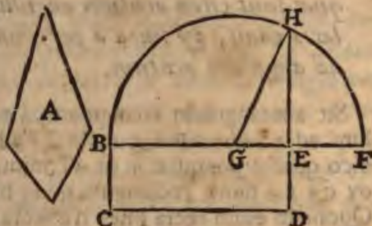


a 12.prim
b 7. huj
c 47.prim

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale
a 45.primi. quadratum constituere. Constituatur [a] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. si igitur BE est æqualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin minus, una ipsarum BE ED major est. sit BE major; & producatur ad F, ponaturque ipsi ED æqualis EF. deinde secta FB bi-
b 10.primi. fariam [b] in G: centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturque DE in H, & GH ducatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum sub BE EF, una cum quadrato quod
c 5. hujus. fit ex EG [c], æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur sub BE EF una cum quadrato ex EG, æ-
d 47.primi. quale est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH æqualia [d] sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum sub BE EF una cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG commune auferatur EG quadratum. reliquum igitur rectangulum sub BE EF est æquale quadrato ex EH. sed rectangulum sub BE EF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod facere oportebat.



EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.

ÆQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta, ipſum non ſecat.

III.

Circuli contingere ſe dicuntur, qui contingentes, ſe ipſos non ſecant.



IV.

In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.



V.

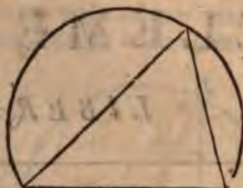
Magis autem diſtare à centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

VI.



Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.

VII.



Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.

VIII.

In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumatur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus, quæ baſis eſt ſegmenti, rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.



IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.

X.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

XI.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.



PROP.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus A B C, oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea A B utcunque, & in puncto D bifariam [a] secetur, à puncto autem D ipsi A B ad rectos angulos [b] ducta D C in E producatur; & secetur C E bifariam [a] in F. dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G centrum, & G A G D G B ducantur. itaque quoniam D A est æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D D G duabus G D D B æquales, altera alteri: & basis G A æqualis [c] est basi G B; sunt enim ex centro G. angulus igitur A D G angulo G D B est [d] æqualis. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, [e] rectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus G D B est rectus. sed & rectus F D B. æqualis igitur est angulus F D B angulo G D B, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli A B C centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli A B C. Quod invenire oportebat.



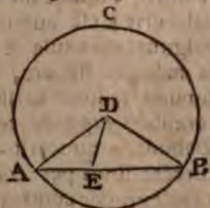
[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] Def. 15. primi.
[d] 8. primi.
[e] Def. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus A B C; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A B. dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. sumatur enim in recta A B punctum quodvis E, & jungantur D A D E D B. Quoniam D A est æqualis D B, erit [a] angulus D A B æqualis angulo D B A, & quoniam trianguli D A E latus A E producitur, erit [b] angulus D E B angulo D A E major, angulus autem D A E æqualis est angulo D B E, ergo D E B angulus angulo D B E est



[a] 5. primi.
[b] 16. primi.

c 19.primi. eſt major. ſed majori [c] angulo majus latus ſubtenditur. major igitur eſt DB ipſa DE. ſed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo uſque protenditur. adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonſtrare.

Cor. Hinc ſi recta circulum tangat, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit; quod ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & bifariam ſecabit.

Sit circulus ABC, & in ipſo recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto F. dico ad angulos rectos ipſam ſecare. ſumatur enim circuli



a 1. hujus. ABC centrum [a] quod ſit E, & EA EB jungantur. Quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis autem FE, duæ AF FE duabus BF FE æquales ſunt, & baſis EA baſi EB eſt æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE æ-
b 8.primi. qualis [b] erit. cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens an-
c Def. 10. primi. gulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt [c] uterque æqualium angulorum. uterque igitur AFE BFE eſt rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam ſecans, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Si vero CD ſecet AB ad rectos angulos, dico & bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi FB æqualem eſſe. iiſdem enim conſtructis, quoniam EA, quæ
d 5. primi. ex centro, eſt æqualis EB, & angulus EAF angulo [d] EBF æqualis erit; eſt autem & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale EF, commune ſcilicet utrique, quod uni angulorum æqualium ſubtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia
e 26. primi. [e] habebunt. atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. quod ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, & bifariam ſecabit. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC BD se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum. dico eas sese bifariam non secare. si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut AE sit æqualis EC, & BE ipsi ED: sumaturque [a] centrum ABCD circuli, quod sit F, & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit [b]. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam [b] secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus & FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC BD sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.



[a] 1. hujus
[b] 3. hujus

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli se invicem secent ABC CDG in punctis B, C. dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcunque ducatur. Quoniam E centrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.



PROP. VI.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC CDE contingant sese intra in puncto C. dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F; jungaturque FC, & FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo & FE ipsi FB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. Quod demonstrare oportebat.



PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F in circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG. dico FA maximam esse, & FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera [a] reliquo sunt majora; erunt BE EF majores quàm BF. est autem AE æqualis BE. ergo BE EF ipsi AF sunt æquales. major igitur est AF quàm FB. rursus quoniam BE est æqualis CE, communis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales



[a] 20. primi.

quales sunt. sed BEF angulus major est angulo CEF: basis igitur BF basi FC est [b] major. eadem ratione & CF major est quam FG. rursus quoniam GF FE majores [a] sunt quam GE, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE majores quam ED. communis auferatur FE. ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, & FD minima: major vero BF quam FC, & FC quam FG major. dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. constituatur [c] enim ad lineam EF atque ad datum in ea punctum E, angulo GEF æqualis angulus FEH: & FH jungatur. quoniam igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis [d] erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim fieri potest, cadat FK & quoniam FK est æqualis FG, estque ipsi FG æqualis FH; erit & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, &c. Quod demonstrare oportebat.

b 24. primi

a 20. primi

c 23. primi

d 4. primi

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore major est. at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum & diametrum interjicitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ, semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: sitque DA per centrum. dico earum quidem, quæ in concavam BEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit; & minimam, quæ inter punctum D & diametrum AG interjicitur, videlicet DG: majorem autem DE quam DF; & DF majorem

majorem quam DC: earum vero quæ in convexam circumferentiam HLKC cadunt, quæ propinquior eſt minimæ DG ſemper remotiore eſſe minorem; hoc eſt DK minorem

a 1. hujus. quam DL, & DL minorem quam DH. ſumatur a enim centrum circuli ABC, quod ſit M, & jungantur ME MF MC MH ML. & quoniam AM eſt æqualis ME, communis apponatur MD. ergo AD eſt æqualis ipſis EM MD. ſed EM MD

b 20. primi. ſunt majores b quam ED ergo & AD quam ED eſt major. rurſus quoniam æqualis eſt ME ipſi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipſi MF MD æquales; at angulus EMD major eſt angulo FMD. baſis igitur

c 24. primi. ED baſi FD major c erit. ſimiliter demonſtrabimus, & FD majorem eſſe quam CD. ergo maxima eſt DA; major autem DE quam DF, & DF quam DC major. præterea quoniam



d Axiom. 4. MK KD ſunt majores b quam MD, & MG eſt æqualis MK; erit reliqua KD quam reliqua d GD major. quare GD minor quam KD, & idcirco GD minima eſt. & quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD in-

e 21. primi. tra conſtituantur, erunt e MK KD minores ipſis ML LD, quarum MK eſt æqualis ML. reliqua igitur DK minor eſt quam reliqua DL. ſimiliter oſtendemus, & DL quam DH minorem eſſe ergo DG minima eſt. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utraſque minimæ partes, conſtituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea

f 23. primi. punctum M, angulo KMD æqualis f angulus DMB, & DB jungatur. itaque quoniam MK eſt æqualis MB, communis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales ſunt, altera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD, baſis igi-

g 4. primi. tur DK baſi DB eſt æqualis g. dico à puncto D aliam ipſi DK æqualem in circulum non cadere. ſi enim fieri poteſt, cadat DN. & quoniam DK eſt æqualis DN, & DK ipſi DB eſt æqualis; erit & DB æqualis DN, propinquior ſcilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, &c. quod oſtendere oportebat.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod ſumitur, circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum A B C cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales D A D B D C. dico punctum D, quod ſumitur, circuli A B C eſſe centrum. Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, ſit E centrum, & juncta D E in F G producatur, ergo F G [a] diameter eſt A B C circuli. itaque quoniam in F G diametro circuli A B C ſumptum eſt aliquod punctum D quod non eſt centrum circuli, maxima quidem erit D G, major [b] autem D C quam D B, & D B quam D A. ſed & æquales, [c] quod fieri non poteſt. non igitur E centrum eſt circuli A B C. ſimiliter oſtendemus neque aliud punctum centrum eſſe præter ipſum D. ergo D circuli B C centrum erit. Quod oportebat demonſtrare.



[a] Def. 17 primi.
[b] 7. hujus
[c] ex hyp.

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat.

Si enim fieri poteſt circulus A B C circulum D E F ſecet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B, G, F, & circuli A B C centrum ſumatur, quod ſit K, & K B K G K F jungantur. Quoniam igitur intra circulum D E F ſumptum eſt aliquod punctum K, à quo in circulum D E F incidant plures quam duæ rectæ lineæ K B K G K F æquales, erit punctum K circuli D E F centrum [a]. eſt autem & circuli A B C centrum [b] K duorum igitur circulorum, qui ſeſe ſecant, idem erit K centrum, quod fieri non poteſt. Quare circulus circulum in pluribus,



[a] 9. hujus.
[b] Ex hyp.

pluribus quam duobus punctis non secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC ADE sese intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F; circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producatur, in punctum A cadere. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut FGDH. & AF AG jungantur. Itaque quoniam AG GF majores ᵃ sunt quam FA, hoc est quam FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG major est quam reliqua GH. sed AG est æqualis GD. ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producatur, in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonstrare.

ᵃ 20. primi.



PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjuugens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE sese extra contingant in puncto A; & sumatur circuli quidem ABC centrum qnod sit F: circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut FCDG: & FA AG jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem, & AF æqualis FC. sunt igitur FA AG ipsis FC DG æquales, ergo tota FG major est quam FA AG. sed & minor,



minor [a], quod fieri non poteſt. non igitur à puncto F ad C ducta recta linea per contactum A non tranſibit. quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. Quod oportebat demonſtrare. [a] 20. primi.

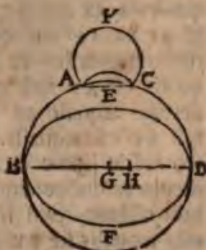
PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus ſive extra contingat.

Si enim fieri poteſt, circulum ABDC circulus EBFD contingat, primum intus, in pluribus punctis quam uno, videlicet in BD: & ſumatur circuli quidem ABDC centrum G, circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta [a] B, D cadet. cadat ut BGHD. & quoniam G centrum eſt circuli ABDC, erit BG ipſi GD æqualis. major igitur eſt BG quam HD: & BH quam HD multo major. rurſus quoniam H centrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo major, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm uno. dico etiam neque extra contingere. ſi enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra contingat in pluribus punctis quàm uno, videlicet in AC, & AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABDC ACK ſumpta ſunt duo puncta A, C; recta linea, quæ ipſa conjungit intra utrumque ipſorum cadet [b]. ſed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quàm uno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, ſive intus, ſive extra contingat. Quod oportebat demonſtrare.

[a] 11. hujus.

[b] 2. hujus.



PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant: & quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus ABDC, & in ipſo æquales rectæ lineæ AB CD. dico eas à centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli

ABDC

ABDC centrum quod ſit B, & ab ipſo ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos

a 3. hujus. angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit [a]. quare AF eſt æqualis FB, ideoque AB ipſius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD æqualis. æqualis igitur & AF ipſi CG. & quoniam AE eſt æqualis EC, erit & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale ſed quadrato



b 47. primi. quidem ex AE æqualia ſunt ex AF FE quadrata [b], rectus enim angulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia ſunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G ſit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia ſunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis eſt AF ipſi CG. reliquum igitur quod fit ex FE quadratum æquale eſt reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipſi EG eſt æqualis. in circulo autem æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpen-

c 4. def. hujus. diculares ductæ æquales [c] ſunt. ergo AB CD à centro æqualiter diſtant. Sed ſi AB CD æqualiter diſtent à centro, hoc eſt, æqualis ſit FE ipſi EG; dico AB ipſi CD æqualem eſſe. iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB duplam eſſe ipſius AF, CD duplam ipſius CG. & quoniam æqualis eſt AE ipſi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. ſed quadrato quidem ex AE æqualia [b] ſunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia [b] quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia ſunt; quorum quadratum ex EG æquale eſt quadrato ex EF, eſt enim EG ipſi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale eſt reliquo ex CG. ergo AF ipſi CG eſt æqualis. atque eſt AB ipſius AF dupla, & CD dupla ipſius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. dico AD maximam esse, & BC majorem quam FG. Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK. & quoniam BC propinquior est ei quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK quam EH major. ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & jungatur EM EN EF EG. quoniam igitur EH est æqualis EL, erit & BC ipsi MN æqualis [a]. rursus quoniam æqualis est AE ipsi EM, & DE ipsi EN, erit & AD ipsis ME EN æqualis. sed ME EN [b] majores sunt quam MN; ergo & AD major est quam MN: & MN est æqualis BC, erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEG, & basis MN basi FG major [c] erit. ostensa autem est MN æqualis BC. ergo & BC quam FG est major. maxima igitur est AD diameter, & BC major quam FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.



[a] 14. hujus
[b] 20. prim.
[c] 24. prim.

PROP. XVI. THEOR.

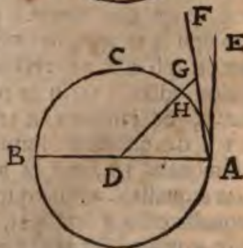
Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim; sed, si fieri

 potest,

poteſt, cadat intus, ut A C, & D C jungantur. itaque quoniam æqualis eſt D A ipſi D C, erit & angulus D A C angulo A C D
a 5. primi. æqualis a. rectus autem eſt D A C b; ergo & A C D eſt rectus;
b ex hyp. ac propterea anguli D A C A C D duabus rectis æquales ſunt.
c 17. primi. quod fieri non poteſt c. non igitur à puncto A ipſi B A ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. ſimiliter oſtendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat neceſſe eſt. cadat ut A E. dico in locum qui inter rectam lineam A E & circumferentiam C H A interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. ſi enim fieri poteſt, cadat ut F A, & à puncto D ad F A perpendicula-
d 12. primi. ris d ducatur D G. & quoniam rectus eſt angulus A G D, minor autem recto
e 19. primi. D A G, erit D A quàm D G major e. æqualis autem eſt D A ipſi D H. major igitur eſt D H ipſa D G, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. dico præterea angulum ſemicirculi, qui recta linea B A, & circumferentia C H A continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem eſſe; reliquum vero contentum circumferentia C H A, & recta linea A E omni angulo rectilineo eſſe minorem. ſi enim eſt aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea B A, & C H A circumferentia, aut aliquis minor contento C H A circumferentia, & recta linea A E, in locum qui inter circumferentiam C H A, & rectam lineam A E interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea B A & C H A circumferentia, qui ſcilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia C H A, & A E
e ex prius demonſtratis. recta linea, non cadit autem e: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea B A, & C H A circumferentia; neque minor contento circumferentia C H A, & A E recta linea.





Cor. Ex hoc manifeſtum eſt rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipſum cadit, ut oſtenſum eſt.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos [a] ducatur DF: junganturque EBF AB. dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est [b] æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit [c], ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.



a 11. primi
b 4. hujus.
c Cor. 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis [a] FG. quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus [b], ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus [c] subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB ergo



a 12. primi
b 32. primi
c 19. primi

ergo F B ipsa F G est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur F G est perpendicularis ad D F, similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam F C. ergo F C ad D E est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim A B C contingat quædam recta linea D E in C, & à puncto C ipsi D E ad rectos angulos ducatur C A. dico in ipsa A C circuli centrum esse. non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur C F. quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea D E, & à centro ad contactum ducta est F C; erit F C ad ipsam D E perpendicularis [a]. rectus igitur angulus est F C E. est autem & A C E rectus [b]. ergo F C E angulus est æqualis angulo A C E, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est A B C circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa A C. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.

[a] 18. hujus.
[b] Ex hyp.



PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus A B C, ad cujus centrum quidem angulus sit B E C, ad circumferentiam vero B A C, & eandem circumferentiam B C pro basi habeant. dico B E C angulum anguli B A C duplum esse. jungatur enim A E, & ad F producatur. itaque quoniam E A est æqualis E B, erit & angulus E A B angulo E B A [a] æqualis. anguli igitur E A B E B A duplices sunt ipsius

ipsius anguli E A B; sed angulus B E F est æqualis [b] angulis E A B E B A; ergo B E F angulus anguli E A B est duplex. eadem ratione & angulus F E C duplex est ipsius E A C. totus igitur B E C totius B A C duplex erit. rursus inflectatur, & sit alter angulus B D C, junctaque D E ad G producatur. similiter ostendemus angulum G E C anguli G D C duplum esse; quorum G E B duplus est ipsius G D B. ergo reliquus B E C reliqui B D C est duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum, duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. Quod oportebat demonstrare. [b] 32. primi



PROP. XXI. THEOR.

In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli inter se æquales sunt.

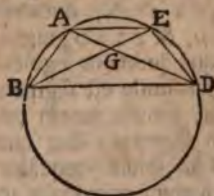
Sit circulus A B C D E, & in eodem segmento B A E D anguli sint B A D B E D. dico eos inter se æquales esse. sumatur enim circuli A B C D E centrum quod sit F: junganturque B F F D. Quoniam angulus quidem B F D est ad centrum, angulus vero B A D ad circumferentiam, & circumferentiam eandem B C D pro basi habent; erit B F D angulus [a] anguli B A D duplus. eadem ratione angulus B F D duplus est etiam anguli B E D. ergo angulus B A D angulo B E D æqualis erit. si anguli B A D B E D sunt in segmento minore semicirculo, ducatur A E, eruntque omnes anguli trianguli A B G æquales [b] omnibus angulis trianguli D E G. & anguli A B E A D E sunt æquales per hactenus demonstrata, & anguli A G B D G E sunt etiam æquales [c], ad verticem enim sunt: quare & reliquus B A G reliquo G E D æqualis erit. In circulo, igitur qui in eodem segmento sunt, anguli inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

[a] 20. hujus



[b] 32. primi

[c] 15. primi



PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt.

Sit circulus ABDC, & in ipſo quadrilaterum ABDC dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis æquales eſſe. Jungantur AD BC: quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duo-
32.primi. bus rectis ſunt æquales [a], erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. ſed angulus ABC eſt
21. hujus. æqualis [b] angulo ADC, in eodem enim ſunt ſegmento ABDC. & angulus ACB æqualis [b] ipſi ADB, quod ſunt in eodem ACDB ſegmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC ACB æqualis eſt. communis apponatur BAC angulus; erunt



anguli BAC ABC ACB angulis BAC BDC æquales. ſed BAC ABC ACB ſunt æquales [a] duobus rectis. ergo & anguli BAC BDC duobus rectis æquales erunt. ſimiliter oſtendemus angulos quoque ABD ACD duobus rectis eſſe æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia ex eadem parte non conſtituentur.

Si enim fieri poteſt, ſuper eadem recta linea AB duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia conſtituantur ex eadem parte ACB ADB; ducaturque ACD, & CB BD jungantur. itaque quoniam ſegmentum ACB ſimile eſt ſegmento ADB, ſimilia autem circulorum ſegmenta ſunt quæ
Def. 11. hujus. angulos ſuſcipiunt [a] æquales; erit ACB angulus æqualis an-
16.primi. gulo ADB, exterior interiori, quod fieri non poteſt [b]. Non igitur ſuper eadem recta linea, duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia ex eadem parte conſtituentur. Quod demonſtrare oportebat.

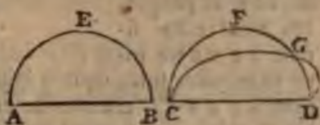


PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt.

Sint enim super æqualibus rectis lineis A B C D similia circulorum segmenta A E B C F D. dico segmentum A E B segmento C F D æquale esse. applicato enim A E B segmento segmento C F D, & posito puncto quidem A in C, recta vero linea A B in C D; congruet & B punctum puncto D, propterea quod A B ipsi C D sit æqualis. congruente autem recta linea A B rectæ C D; congruet & A E B segmentum segmento C F D. si enim A B congruet ipsi C D, segmentum autem A E B segmento C F D non congruet, sed permutabitur ut C G D, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus C, G D circulum C F D secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D, quod fieri non [a] potest. non igitur congruente recta linea A B rectæ C D, non congruet & A E B segmentum segmento C F D. quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare. a 10. hu



PROP. XXV. PROBL.

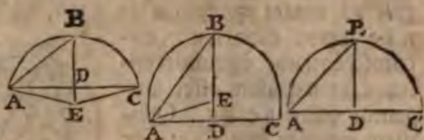
Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum A B C. oportet describere circulum cujus A B C est segmentum. Secetur A C bifariam [a] in D: & à puncto D ipsi A C ad rectos angulos ducatur [b] D B, & A B jungatur. vel igitur angulus A B D major est angulo B A D, vel minor, vel ipsi æqualis. sit primum major, & ad rectam lineam B A, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus B A E æqualis [c] angulo A B D; & D B ad E producatur, jungaturque E C. quoniam igitur angulus A B E est æqualis angulo

a 10. pri

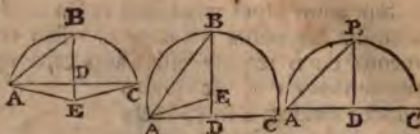
b 11. pri

c 23. pri



angulo

d 6. primi. angulo BAE, [d] erit & BE recta linea ipsi EA æqualis: & quoniam AD est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est. ergo & basis AE basi
e 4. primi. EC est æqualis[e]. sed ostensa est AE æqualis EB. quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua [f] transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segementum est. sed & illud constat, segmentum ABC semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. [g] similiter, & si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali utrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, & segmentum ABC semicirculus. [h] si vero angulus ABD minor sit angulo BAD; constituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus BAE intra segmentum ABC. erit E centrum in ipsa DB, atque erit ABC segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.

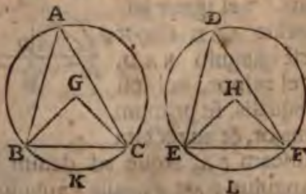


f 9. hujus.
g Cas. 3. Fig. 3.
h Cas. 2. Fig. 2.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. jungantur enim BC EF. Quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales sunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H. ergo & basis



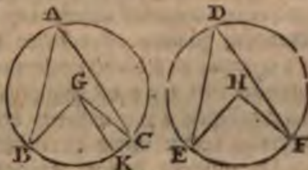
basis BC basi EF est [a] æqualis. rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D, segmentum BAC simile [b] erit segmento EDF: & sunt super æqualibus rectis lineis BC EF. quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia [c] sunt. segmentum igitur BAC segmento EDF est æquale. sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF. ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

a 4. primi
b Def. 11. hujus.
c 24. hujus

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqualem esse. si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit major BGC, & constituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipsa G, angulo EHF æqualis [a] angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus insistunt [b] circumferentiis, quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF. sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC. ergo & BK ipsi BC est æqualis. minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF: ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidium qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

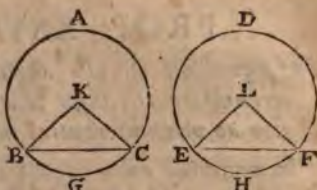


a 23. primi
b 26. hujus

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli A B C D E F; & in ipsis æquales rectæ lineæ B C E F, quæ circumferentias quidem B A C E D F majores auferant, circumferentias vero B G C E H F minores. dico circumferentiam B A C majorem majori circumferentiæ E D F, & minorem circumferentiam B G C minori E H F æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K, L, junganturque B K K C E L, L F. Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales [b]. duæ igitur B K K C sunt æquales duabus E L L F: & basis B C æqualis est basi E F, ergo angulus B K C angulo E L F est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint [d]. quare circumferentia B G C æqualis est circumferentiæ E H F, sed & totus A B C circulus toti D E F est æqualis. reliqua igitur circumferentia B A C reliquæ E D F æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.



a 1. hujus.
b Def. 1. hujus.
c 8. primi.
d 26. hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Vide figur. Prop. præcedentis.

Sint æquales circuli A B C D E F: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ B G C E H F, & B C E F jungantur. dico rectam lineam B C rectæ E F æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K, L, & jungantur B K K C E L D F. quoniam igitur circumferentia B G C est æqualis circumferentiæ E H F, erit & angulus B K C angulo E L F æqualis [b]. & quoniam circuli A B C D E F sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt [c]. duæ igitur B K K C sunt æquales duabus E L L F; & æquales angulos continent. quare basis B C basi E F est [d] æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

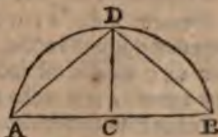
a 1. hujus.
b 27. hujus.
c Def. 1. hujus.
d 4. primi.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia A D B. oportet A D B circumferentiam bifariam ſecare. Jungatur A B, & in C bifariam [a] ſecetur: [a] 10.primi. à puncto autem C ipſi A B ad rectos angulos ducatur C D. & jungantur A D D B. quoniam igitur A C eſt æqualis C B, communis autem C D, duæ A C C D duabus B C C D æquales ſunt: & angulus A C D æqualis angulo B C D, rectus enim uterque eſt: ergo baſis A D baſi B D eſt [b] æqualis. æquales autem rectæ lineæ [c] circumferentias æquales auferunt, quare circumferentia A D circumferentiæ B D æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. Quod facere oportebat.

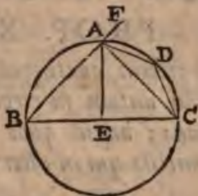


[b] 4. primi.
[c] 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt, qui vero in majori ſegmento, minor eſt recto, & qui in minori, major recto; & inſuper majoris quidem ſegmenti angulus recto major eſt, minoris vero ſegmenti angulus recto minor.

Sit circulus A B C D cujus diameter B C, centrum autem E; & jungantur B A A C A D D C. dico angulum quidem qui eſt in ſemicirculo B A C rectum eſſe, qui vero in ſegmento A B C majore ſemicirculo, videlicet angulum A B C, minorem eſſe recto, & qui eſt in ſegmento A D C minore ſemicirculo, hoc eſt angulum A D C, recto majorem. Jungatur A E, & B A ad F producatur. itaque quoniam B E eſt æqualis E A, erit & angulus E A B, angulo E B A æqualis [a]. rurſus quoniam A E eſt æqualis E C, & angulus A C E angulo C A E æqualis [a] erit. totus igitur angulus B A C eſt æqualis duobus A B C A C B angulis, eſt autem, & angulus F A C extra triangulum A B C, duobus A B C A C B æqualis [b]. angulus igitur B A C eſt æqualis angulo F A C; ac propterea uterque ipſorum rectus [c]. quare in ſemicirculo B A C angulus B A C rectus eſt.

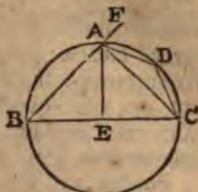


[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] Def. 10. primi.

est. & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis sunt [d] minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque est in segmento ABC majore semicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum sit ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint [e] æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis, & angulus ABC minor est recto, reliquus igitur ADC recto major erit, atque est in segmento ADC minore semicirculo. dico præterea majoris segmenti angulum qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC recto majorem esse; angulum vero minoris segmenti, contentum circumferentia ADC, & recta linea AC recto minorem. quod quidem perspicue apparet. quoniam angulus qui rectis lineis BA AC continetur rectus est, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto major. rursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus est, erit qui continetur recta linea CA, & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus qui in semicirculo, rectus est, qui vero in majore segmento, minor est recto, & qui in minori, major recto: & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero recto minor. Quod demonstrare oportebat.

[d] 17. primi.

[e] 22. hujus.



Cor. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quòd & qui deinceps est, iisdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt [f].

[f] Def. 10. primi.

PROP. XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, & à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum utcunque secans. dico angulos quos BD cum EF contingente facit, æquales esse iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. hoc est angulum FBD esse æqualem angulo qui constituitur in DAB segmento, videlicet ipsi

DAB;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in ſegmento DCB conſtituitur. ducatur enim à puncto B ipſi EF ad rectos [a] angulos BA: & in circumferentia BD ſumatur quodvis punctum C; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt BA; erit in ipſa BA centrum [b] ABCD circuli; quare BA ejuſdem circuli [c] diameter eſt, & angulus ADB in ſemiciculo eſt [d] rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto [e] æquales ſunt. ſed & ABF [f] eſt rectus. ergo angulus ABF æqualis eſt angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet angulo BAD, eſt æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, & anguli ejus oppoſiti æquales [g] ſunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD oſtenſus eſt æqualis ipſi DBF; ergo reliquus DBE ei, qui in alterno circuli ſegmento DCB conſtituitur, videlicet ipſi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. Quod oportebat demonſtrare.



[a] 11. primi.
[b] 19. primi.
[c] Def. 17. primi.
[d] 31. hujus.
[e] 32. primi.
[f] ex conſtr.
[g] 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

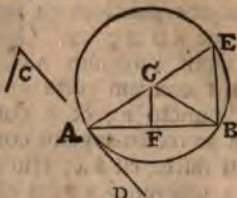
Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet ſuper data recta linea AB deſcribere ſegmentum circuli, quod ſuſcipiat angulum æqualem angulo qui eſt ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C æqualis [a]. & à puncto A ipſi AD ad rectos angulos [b] ducatur AE; ſecetur autem AB bifariam [c] in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipſi AB; & GB jungatur. quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis



[a] 23. primi.
[b] 11. primi.
[c] 10. primi.

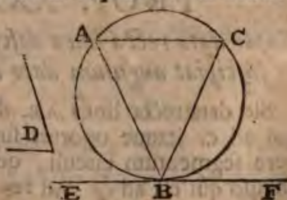
munis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales ſunt: & angulus AFG æqualis angulo BFG. ergo baſis AG baſi
d 4. hujus. GB eſt [d] æqualis. itaque centro G, intervallo autem AG circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur, & ſit ABE, jungaturque EB. quoniam igitur ab extremitate diametri AE, & à puncto A, ipſi AE ad rectos angulos ducta eſt AD; ipſa AD circulum [e] continget. & quo-
e Cor. 16. hujus. niam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, & à contactu qui eſt ad A, in circulum ABE ducta eſt recta
f 32. hujus. linea AB: erit angulus DAB æqualis [f] angulo qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur, videlicet ipſi AEB. ſed angulus DAB, angulo ad C eſt æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. ſuper data igitur recta linea AB, ſegmentum circuli deſcriptum eſt AEB ſuſcipiens angulum AEB, dato angulo qui eſt ad C, æqualem. Quod facere oportebat.



PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo ſegmentum abſcindere quod ſuſcipiat angulum dato rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet à circulo ABC ſegmentum abſcindere.
a 17. hujus. quod ſuſcipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur [a] recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, conſtituatur angulus FBC angulo qui eſt
b 23. primi. ad D æqualis [b]. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, & à contactu B ducta eſt BC, erit angulus FBC æ-
c 32. hujus. qualis [c] ei qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur. ſed FBC angulus angulo qui ad D eſt æqualis. ergo & angulus in ſegmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC, abſciſſum eſt ſegmentum quoddam BAC, ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo qui eſt ad D, æqualem. Quod facere oportebat.



PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius contentum, æquale eſt ei, quod ſub alterius ſegmentis continetur, rectangulo.

In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC BD ſeſe mutuo in puncto E ſecent. dico rectangulum contentum ſub AE EC æquale eſſe ei quod ſub DE EB continetur. ſi AC BD per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum ABCD circuli; manifeſtum eſt æqualibus exiſtentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum ſub AE EC æquale eſſe ei quod ſub DE EB continetur. ſi AC DB non tranſeant per centrum, ſumatur centrum circuli ABCD quod ſit F: & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: junganturque FB FC FE. quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit [a]. quare AG ipſi GC eſt æqualis. & quoniam recta linea AC ſecta eſt in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulum ſub AE EC contentum, una cum ipſius EG quadrato [b], æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum ſub AE EC, una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale eſt quadratis ex CG GF. ſed quadratis quæ ex EG GF æquale [c] eſt quadratum ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale eſt [c] quod ex FC ſit quadratum. rectangulum igitur ſub AE EC, una cum quadrato ex FE, æquale eſt quadrato ex FC. eſt autem CF æqualis FB. ergo rectangulum ſub AE EC, unà cum quadrato ex EF, æquale eſt ei quod ex FB ſit quadrato. eadem ratione & rectangulum ſub DE EB unà cum quadrato ex FE, æquale eſt quadrato ex FB. oſtenſum autem eſt & rectangulum ſub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale ei quod ſit ex FB quadrato. ergo rectangulum ſub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale eſt rectangulo ſub DE EB, unà cum quadrato ex FE. commune auferatur FE quadratum. reliquum igitur rectangulum ſub AE EC, reliquo ſub DE EB rectangulo æquale erit. Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius contentum æquale eſt ei quod ſub alterius ſegmentis continetur. Quod demonſtrare oportebat.





a 3. hujus.

b 5. ſecundi.

c 47. primi.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secat, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB: & DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. dico rectangulum sub AD DC, quadrato, quod fit ex DB, æquale esse. vel igitur DCA per centrum transit, vel non transit. primum transeat per centrum circuli ABC, quod sit E, & EB jungatur. erit

a 18. hujus. angulus EBD rectus a. itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in E, & ipsi adjicitur CD, rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EC, æ-

b 6. secundi. quale b erit ei quod fit ex ED quadrato. æqualis autem est CE ipsi EB, ergo rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato quod ex EB, æquale est quadrato ex ED.





c 47. primi. sed quadratum ex ED est æquale quadratis c ipsarum EB BD, rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ipsarum EB, BD quadratis. commune auferatur quadratum quod ex EB; ergo reliquum sub AD DC rectangulum, quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. secundo DCA non transeat

d 1. hujus. per centrum ABC circuli: sumaturque d centrum E, & ad AC perpendicularis agatur EF, & jungantur EB EC ED, rectus igitur est EFD angulus. & quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifa-

e 3. hujus. riam ipsam secabit e. quare AF ipsi FC est æqualis. rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato ex FC, æquale b quadrato quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur sub

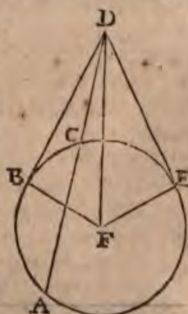
AD DC

AD DC unà cum quadratis ex FC FE eſt æquale quadratis ex DF FE. ſed quadratis quidem ex DF FE æquale eſt *c* ex DE quadratum; etenim rectus eſt angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale eſt *c* quadratum ex CE. *c* 47. primi. ergo rectangulum ſub AD DC, una cum quadrato quod ex CE, eſt æquale quadrato ex ED; æqualis autem eſt CE ipſi EB; rectangulum igitur ſub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale eſt ex ED quadrato. ſed quadrato ex ED æqualia ſunt quadrata *c* ex EB BD, ſiquidem rectus eſt angulus EBD. ergo rectangulum ſub AD DC, una cum quadrato ex EB æquale eſt eis quæ ex EB BD fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur ſub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, &c. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero incidat: ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius aſſumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum, æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; DCA quidem circulum ſecet, DB vero incidat: ſitque rectangulum ſub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. dico ipſam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE *a* contingens circulum ABC, & ſumatur circuli ABC centrum, quod ſit F, junganturque FE FB FD. ergo angulus FED rectus eſt *b*. & quoniam DE circulum ABC contingit, ſecat autem DCA; rectangulum ſub AD DC æquale erit *c* quadrato ex DE. ſed rectangulum ſub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE erit ipſi DB æqualis. eſt autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales ſunt;



a 17. hujus.

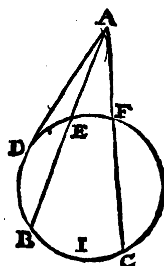
b 18. hujus.

c ex antecedente.

d 8. primi. sunt; & basis communis F D; angulus igitur D E F est d æqualis angulo D B F; rectus autem est D E F, ergo & D B F est rectus. atque est F B producta diameter. quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingit e. ergo D B circulum A B C contingat necesse est. similiter demonstrabitur & si centrum sit in ipsa A C. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. Quod demonstrare oportebat.

e Cor. 16. hujus.

Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ A B A C circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis A B A C, & partibus externis A E A F, inter se sunt æqualia. nam si ducatur tangens A D, erit rectangulum sub B A A E æquale quadrato ex A D; & rectangulum sub C A A F eidem quadrato ex A D erit æquale. unde rectangula hæc æqualia erunt.



EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.



II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus ſimiliter in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua deſcribitur, contingit.

IV.

Circulus circa figuram rectilineam deſcrbi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam deſcribitur, contingit.

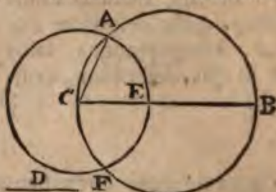
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, datæ rectæ lineæ quæ diametro ejus major non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea non major circuli diametro D. oportet in circulo A B C rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli A B C diameter B C. ſi quidem igitur B C ſit æqualis ipſi D, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo A B C aptata eſt B C rectæ lineæ D æqualis. ſin minus, major eſt B C quam D, ponaturque a 3. primi. a ipſi D æqualis C E: & centro quidem C intervallo autem C E circulus deſcribatur A E F: & C A jungatur. itaque quoniam punctum C centrum eſt A E F circuli; erit C A ipſi C E æqualis. ſed D eſt æqualis C E. ergo & D ipſi A C æqualis erit. in dato igitur circulo A B C datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata eſt A C. Quod facere oportebat.

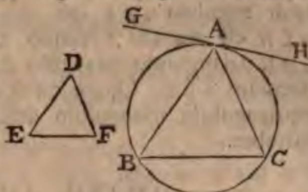


PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. oportet in A B C circulo deſcribere triangulum triangulo D E F a 17. tertii. æquiangulum. ducatur recta linea G A H contingens a circulum

lum A B C in puncto A: & ad rectam lineam A H, & ad punctum in ea A, angulo D E F æqualis [b] angulus constituatur H A C. rursus ad rectam lineam A G, & ad punctum in ipsa A, angulo D F E æqualis [b] constituatur angulus G A B; & B C jungatur. quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta H A G; à contactu autem in circulum b 23.primi.

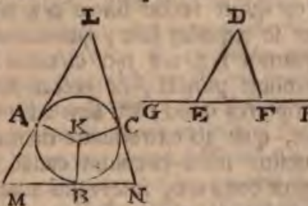


ducta est A C: erit H A C angulus æqualis [c] ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi A B C. sed H A C angulus æqualis est angulo D E F, ergo & angulus A B C angulo D E F est æqualis. eadem ratione & angulus A C B est æqualis angulo D F E. reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis [d] erit. ergo triangulum A B C triangulo D E F est æquiangulum, & descriptum est in circulo A B C. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat. c 32. tertii. d 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. oportet circa circulum A B C describere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte E F ad puncta H, G, & sumatur circuli A B C centrum K: & recta linea K B utcunque ducatur: constituaturque ad rectam lineam K B, & ad punctum in ea K, angulo quidem D E G æqualis [a] angulus B K A, angulo autem D F H æqualis [a] angulus B K C, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ L A M M B N N C L circulum A B C contingentes [b]. a 23.primi. b 17. tertii.



Quoniam igitur circulum A B C contingunt L M M N N L in punctis A, B, C, à centro autem K ad A B C puncta ducuntur K A K B K C; erunt anguli ad puncta A B C recti [c]. & quoniam quadrilateri A M B K anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli K A M K B M sunt recti; erunt reliqui A K B A M B duobus rectis æquales. sunt autem & D E G D E F æquales duobus rectis. anguli igitur A K B A M B angulis D E G D E F c 18. tertii.

 æquales

æquales ſunt, quorum AKB ipſi DEG eſt æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. ſimiliter demonſtrabitur angulus LNB ipſi DFE æqualis. ergo & reliquus
d 2. Cor. MLN eſt æqualis d reliquo EDF. æquiangulum igitur eſt
32. primi. LMN triangulum triangulo DEF; & deſcriptum eſt circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum deſcribere.

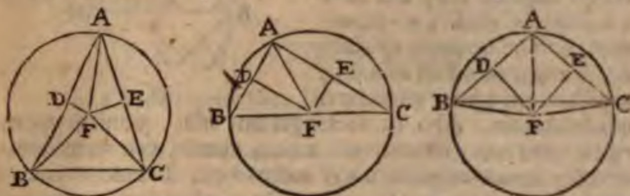
Sit datum triangulum ABC, oportet in triangulo ABC circulum deſcribere. Secentur a anguli ABC BCA bifariam (a 9. primi.) rectis lineis BD CD quæ conveniant inter ſe in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares b ducantur DE DF DG. (b 12. primi.) Quoniam angulus EBD eſt æqualis angulo FBD, eſt autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale utrique commune BD, quod ſcilicet uni æqualium angulorum ſubtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia c habebunt, (c 26. primi.) atque erit DE æqualis DF. & eadem ratione DG æqualis DF. ergo & DE ipſi DG eſt æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter ſe æquales ſunt; quare centro D intervallo autem unius ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quòd recti ſunt ad E F G anguli. ſi enim ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod eſt abſurdum d. (d 16. tertii.) non igitur centro D, intervallo autem unius ipſarum DE DF DG circulus deſcriptus ſecabit rectas lineas AB BC CA, quare ipſas continget; atque erit circulus deſcripus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

Sit datum triangulum A B C. oportet circa datum triangulum A B C. circulum deſcribere. Secentur A B A C bifariam [a] in D, E punctis: & à punctis D E ipſis A B A C ad rectos angulos [b] ducantur D F E F quæ quidem vel intra triangulum A B C conveniant, vel in recta linea B C, vel extra ipſam. conveniant primo intra triangulum in puncto F: & [a] 10.pri [b] 11.pri



B F F C F A jungantur. quoniam igitur A D eſt æqualis D B, communis autem & ad rectos angulos D F; erit baſis A F baſi F B æqualis [c]. ſimiliter oſtendetur & C F æqualis F A. ergo & B F eſt æqualis F C. tres igitur F A F B F C inter ſe æquales ſunt. quare centro F, intervallo autem unius ipſarum F A F B F C circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit: atque erit circulus deſcriptus circa triangulum A B C. & deſcribatur ut A B C. ſecundo D F E F conveniunt in recta linea B C, in puncto F, ut in ſecunda figura, & A F jungatur. ſimiliter demonſtrabimus punctum F centrum eſſe circuli circa triangulum A B C deſcripti. poſtremo D F E F conveniant extra triangulum A B C rurſus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur A F F B F C. & quoniam rurſus A D eſt æqualis D B, communis autem & ad rectos angulos D F, baſis A F baſi F B æqualis erit. ſimiliter demonſtrabimus & C F ipſi F A æqualem eſſe. quare & B F eſt æqualis F C. rurſus igitur centro F, intervallo autem unius ipſarum F A F B F C circulus deſcriptus & per reliqua tranſibit puncta; atque erit circa triangulum A B C deſcriptus. Circa datum igitur triangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat. [c] 4. pri

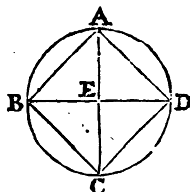
Cor. Si triangulum ſit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppoſitum. ſi acutangulum cadet centrum intra triangulum. ſi obtuſangulum cadet extra.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. oportet in A B C D circulo quadratum describere. Ducantur circuli A B C D diametri ad rectos angulos inter se A C B D: & A B B C C D D A jungantur. Quoniam igitur B E est æqualis E D, etenim centrum est E, communis autem, & ad rectos angulos E A; erit basis

a 4. primi. B A æqualis a basi A D. & eadem ratione utraque ipsarum B C C D utriq; B A A D est æqualis; æquilaterum igitur est A B C D



quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea B D diameter est A B C D circuli, erit B A D semi-

b 31. tertii. circulus. quare angulus B A D rectus b est. & eadem ratione unusquisque ipsorum A B C B C D C D A est rectus. rectangulum igitur est A B C D quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo A B C D. in dato igitur A B C D circulo quadratum A B C D descriptum est. Quod facere oportebat.

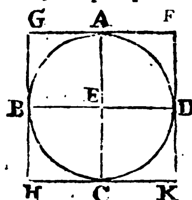
PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. oportet circa A B C D circulum quadratum describere. Ducantur circuli A B C D duæ diametri A C B D ad rectos inter se angulos, & per puncta A, B, C, D ducantur circulum A B C D

a 17. tertii. contingentes a F G G H H K K F. Quoniam igitur F G contingit circulum A B C D, à centro autem E ad contactum qui est

b 18. tertii. ad A ducitur E A; erunt b anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D recti



sunt. & quoniam angulus A E B rectus est, est autem &

c 28. primi. rectus E B G; erit G H ipsi A C parallela c. eadem ratione, & A C parallela est F K. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum G F H K ipsi B E D parallelam esse. quare & G F est

d 30. primi. parallela H K. d parallelogramma igitur sunt G K G C A K F B

e 34. primi. B K, ac propterea G F quidem est e æqualis H K, G H, vero ipsi F K, & quoniam A C æqualis est B D; sed A C quidem utrique ipsarum

ipſarum G H F K eſt [d] æqualis; B D vero æqualis utrique G F H K, & utraque G H F K utrique G F H K æqualis erit. æquilaterum igitur eſt F G H K quadrilaterum. dico & rectangulum eſſe. quoniam enim parallelogrammum eſt G B E A, atque eſt rectus A E B angulus, & ipſe A G B rectus erit. ſimiliter demonſtrabimus angulos etiam ad puncta H K F rectos eſſe. rectangulum igitur eſt quadrilaterum F G H K. demonſtratum autem eſt & æquilaterum. ergo quadratum ſit neceſſe eſt, & deſcriptum eſt circa circulum A B C D. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit datum quadratum A B C D. oportet in quadrato A B C D circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum A B A D bifariam [a] in punctis F, E. & per E quidem alterutri ipſarum A B C D parallela [b] ducatur E H: per F vero ducatur F K parallela [b] alterutri A D B C. parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum A K K B A H H D A G G C B G G D: & latera ipſorum quæ ex oppoſito, ſunt æqualia [c]. & quoniam D A eſt æqualis A B; & ipſius quidem A D dimidium eſt A E; ipſius vero A B dimidium A F; erit A E ipſi A F æqualis. quare & oppoſita latera æqualia ſunt. ergo F G eſt æqualis G E. ſimiliter demonſtrabimus, & utramque ipſarum G H G K utrique F G G E æqualem eſſe. quatuor igitur G E G F G H G K inter ſe ſunt æquales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E G F G H G K circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas A B B C C D D A continget; propterea quod anguli ad E, F, H, K, recti ſunt: ſi enim circulus ſecabit rectas lineas A B B C C D D A, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod [d] eſt abſurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipſarum G E G F G H G K circulus deſcriptus rectas lineas A B B C C D D A ſecabit. quare ipſas neceſſario continget; atque erit deſcriptus in quadrato A B C D. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



a 10. prin

b 31. prin

c 34. prin

d 16. tert

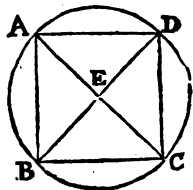
PROP.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum A B C D. oportet circa A B C D quadratum circulum describere. Jungantur A C B D, quæ se invicem in puncto E secent. & quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C; duæ D A A C duabus B A A C æquales sunt; & basis D C æqualis basi B C; erit angulus D A C angulo B A C æqualis [a]. angulus igitur D A B bifariam sectus est recta linea A C. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum A B C B C D C D A rectis lineis A C D B bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus D A B angulo A B C est æqualis, atque est anguli quidem D A B dimidium angulus E A B, anguli vero A B C dimidium E B A; & E A B angulus angulo E B A æqualis erit. quare & latus E A lateri E B est [b] æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum E C E D utrique E A E B æqualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ E A E B E C E D inter se sunt æquales. centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum E A E B E C E D circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa A B C D quadratum. describatur ut A B C D. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

[a] 8. primi.
[b] 6. primi.

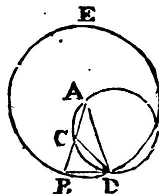


PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam linea A B, & secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub A B B C æquale [a] sit ei, quod ex C A describitur, quadrato: & centro quidem A, intervallo autem A B circulus describatur B D E; apteturque in B D E circulo recta linea B D æqualis [b] ipsi A C quæ non est major diametro circuli B D E: & junctis D A D C, circa A D C triangulum [c] circulus A C D describatur. itaque quoniam rectangulum A B C æquale est quadrato quod fit ex A C;

[a] 11. secundi.
[b] 1. hujus.
[c] 5. hujus.



A C; æqualis autem eſt A C ipſi B D; erit ſub A B B C rectan-
lum quadrato ex B D æquale. & quoniam extra circulum
A C D ſumptum eſt aliquod punctum B, & à puncto B in
circulum A C D cadunt duæ rectæ lineæ B C A B D, quarum
altera quidem ſecat, altera vero incidit; atque eſt re-
ctangulum ſub A B B C æquale quadrato ex B D: recta li-
nea B D circulum A C D [c] continget. quoniam igitur B D con- c 37. tertii
tingit, & à contactu ad D ducta eſt D C; erit B D C angu-
lus æqualis [d] ei qui in alterno circuli ſegmento conſti- d 32. tertii
tuitur, videlicet angulo D A C. quod cum angulus B D C æ-
qualis ſit ipſi D A C, communis apponatur C D A; totus igitur
B D A eſt æqualis duobus angulis C D A D A C. ſed ipſis C D A
D A C exterior angulus B C D eſt [e] æqualis. ergo & B D A æ- e 32. primi
qualis eſt ipſi B C D. ſed B D A angulus eſt [f] æqualis angulo f 5. primi
C B D, quoniam & latus A D lateri A B eſt æquale. ergo &
D B A ipſi B C D æqualis erit. tres igitur anguli B D A D B A
B C D inter ſe æquales ſunt. & quoniam angulus D B C æqua-
lis eſt angulo B C D, & latus B D lateri D C eſt [g] æquale. ſed B D g 6. primi.
ponitur æqualis ipſi C A. ergo & C A eſt æqualis C D. quare &
angulus C D A æqualis eſt angulo D A C. anguli igitur C D A
D A C ſimul ſumpti ipſius anguli D A C duplices ſunt. eſt autem
& B C D angulus angulis C D A D A C æqualis; ergo & B C D
duplex eſt ipſius D A C. ſed B C D eſt æqualis alterutri ipſo-
rum B D A D B A. quare & uterque B D A D B A ipſius D A B
eſt duplex. Iſoſceles igitur triangulum conſtitutum eſt A D B
habens utrumque eorum angulorum qui ſunt ad baſim, du-
plum reliqui. Quod facere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

*In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangu-
lum deſcribere.*

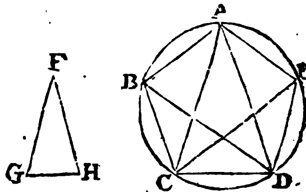
Sit datus circulus A B C D E. oportet in A B C D E circulo
pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Ex-
ponatur triangulum iſoſceles
F G H habens utrumque eo-
rum qui ſunt ad baſim G H
angulorum, duplum [a] anguli a 10. hujus
qui eſt ad F: & deſcribatur
in circulo A B C D E triangu-
lo F G H æquiangulum [b] tri- b 2. hujus
angulum A C D, ita ut angulo





quidem qui eſt ad F æqualis ſit angulus C A D; utrique
vero ipſorum qui ad G H, ſit æqualis uterque A C D C D A. &
uterque

uterque igitur ACD CDA anguli CAD eſt duplus. ſecetur
primi. uterque ipſorum ACD CDA bifariam c rectis lineis CE DB:
& AB BC DE EA jungantur. quoniam igitur uterque ipſorum ACD CDA duplus eſt ipſius CAD, & secti ſunt bifariam rectis lineis CE DB, quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter ſe ſunt æquales. æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis inſiſtunt d. quinque



tertii. igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales ſunt inter ſe. ſed æquales circumferentias e æquales rectæ lineæ ſubtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE EA inter ſe æquales ſunt. æquilaterum igitur eſt ABCDE pentagonum: dico & æquiangulum eſſe. quoniam enim circumferentia AB æqualis eſt circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB eſt æqualis, & in circumferentia quidem ABCD inſiſtit angulus AED, in circumferentia vero EDCB inſiſtit BAE. ergo & BAE angulus eſt æqualis angulo AED. eadem ratione & unuſquiſque angulorum ABC BCD CDE unicuique ipſorum BAE AED eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonum: oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Intelligantur pentagoni in circulo deſcripti a angulorum puncta eſſe ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA ſint æquales; & per puncta A, B, C, D, E, ducantur b circulum contingentes GH HK KL LM MG, & ſumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, & à centro F ad contactum qui eſt ad C ducta eſt FC, erit FC ad ipſam KL perpendicularis c. rectus igitur eſt uterque angulorum qui ſunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta B D recti ſunt. & quoniam rectus angulus eſt FCK,

quadra-

quadratum quod fit ex FK æquale [d] eſt quadratis ex FC CK. & ob eandem cauſam quadratis ex FB BK æquale eſt ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia ſunt, quorum quod ex FC ei quod ex FB eſt æquale. ergo reliquum quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur eſt BK ipſi CK. & quoniam FB eſt æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales ſunt; & baſis BK eſt æqualis baſi KC; erit angulus [e] itaque BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur eſt angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipſius FKC. eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL eſt duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD eſt æqualis, & angulus BFC angulo CFD æqualis [f] erit. atque eſt angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipſius LFC. æqualis igitur eſt angulus KFC angulo CFL. itaque duo triangula ſunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale quod ipſis commune eſt FC: ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [g], & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC eſt æqualis rectæ CL, & angulus FKC angulo FLC. & quoniam KC eſt æqualis CL, erit KL ipſius KC dupla. eadem ratione, & HK ipſius BK dupla oſtendetur. rurſus quoniam BK oſtenſa eſt æqualis ipſi KC, atque eſt KL quidem dupla KC, HK vero ipſius BK dupla: erit HK ipſi KL æqualis. ſimiliter & unaquæque ipſarum GH GM ML oſtendetur æqualis utrique HK KL. æquilaterum igitur eſt GHKLM pentagonum. dico etiam æquiangulum eſſe. quoniam enim angulus FKC eſt æqualis angulo FLC; & oſtenſus eſt angulus HKL duplus ipſius FKC; ipſius vero FLC duplus KLM: erit & HKL angulus angulo KLM æqualis. ſimili ratione oſtendetur & unuſquiſque ipſorum KHG HGM GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter ſe æquales ſunt. ergo æquiangulum eſt GHKLM pentagonum. oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe: & deſcriptum eſt circa ABCDE circulum. Quod facere oportebat.



[d] 47. primi.
[e] 8. primi.
[f] 27. tertii.
[g] 26. primi.

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum deſcri-
a 9. primi. bere. Secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam a rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter ſe CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC eſt æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales ſunt, & angulus BCF eſt æqualis angulo DCF. baſis igi-
b 4. primi. tur BF baſi FD eſt b æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales,



quibus æqualia latera ſubtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF eſt duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo CBF æqualis. angulus igitur ABC bifariam ſectus eſt recta linea BF. ſimiliter demonſtrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam ſectum eſſe. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur
c 12. primi. c perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF eſt æqualis angulo KCF; eſt autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune ſcilicet utriſque FC, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur. ergo & reliqua latera re-
d 26. primi. liquis lateribus æqualia d habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. ſimiliter oſtendetur & unaquæque ipſarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter ſe æquales ſunt. quare centro F intervallo autem unius ipſarum FG FH FK FL FM, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti ſunt. ſi enim non continget, ſed ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet,
e 16. tertii. quod abſurdum e eſſe oſtenſum eſt. non igitur centro F, & inter-

intervallo uno ipſorum punctorum G H K L M circulus deſcriptus rectas lineas A B B C C D D E E A ſecabit. quare ipſas contingat neceſſe eſt. deſcribatur ut G H K L M. In dato igitur pontagono quod eſt æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ biſecentur, & à puncto in quo coëunt lineæ angulum biſecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt biſecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E. oportet circa pentagonum A B C D E circulum deſcribere. Secetur uterque ipſorum B C D C D E angulorum bifariam [a] rectis lineis C F F D: a 9.primi.



& à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B A E ducantur F B F A F E. & unuſquiſque angulorum C B A B A E A E D rectis lineis B F F A F E bifariam [b] ſectus erit. & quoniam angulus B C D angulo b Cor præcedente. C D E eſt æqualis; atque eſt anguli quidem B C D dimidium angulus F C D, anguli vero C D E dimidium C D F; erit & F C D angulus æqualis angulo F D C, quare & latus C F lateri F D eſt æquale [c]. ſimiliter demonſtrabitur & unaquæque ipſarum F B F A F E æqualis unicuique F C F D. quinque igitur rectæ lineæ F A F B F C F D F E inter ſe æquales ſunt. ergo centro F, & intervallo unius ipſarum F A F B F C F D F E, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pentagonum A B C D E quod æquilaterum eſt & æquiangulum. deſcribatur, & ſit A B C D E. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat. c 6.primi.

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C D E F. oportet in circuli A B C D E F hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Ducatur

Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, ſumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG circulus deſcribatur EGCH, junctæ EG CG ad puncta B F producantur, & jungantur AB BC CD DE EF FA. dico hexagonum ABCDEF æquilaterum & æquiangulum eſſe. Quoniam enim G punctum centrum eſt ABCDEF circuli, erit GE ipſi GD æqualis. rurſus quoniam D centrum eſt circuli EGCH, erit DE æqualis DG: ſed GE ipſi GD æqualis oſtenſa eſt. ergo GE ipſi ED eſt æqualis. æquilaterum igitur eſt EGD triangulum, ideoque tres ipſius anguli EGD GDE DEG inter ſe æquales [a] ſunt; & ſunt trianguli tres anguli æquales [b] duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars eſt. ſimiliter oſtendetur & DGC duorum rectorum tertia pars. & quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens, angulos qui deinceps ſunt EGC CGB duobus rectis æquales [c] efficit; erit & reliquus CGB tertia pars duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter ſe ſunt æquales. & qui ipſis ad verticem ſunt anguli BGA AGF FGE æquales [d] ſunt angulis EGD DGC CGB. quare ſex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter ſe æquales ſunt. ſed æquales anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt [e]. ſex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter ſe ſunt æquales: æquales autem circumferentias æquales [f] rectæ lineæ ſubtendunt. ergo & ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſint neceſſe eſt. ac propterea æquilaterum eſt ABCDEF hexagonum. dico & æquiangulum eſſe. quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED eſt æqualis, communis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD circumferentia æqualis eſt toti circumferentiæ EDCBA. & circumferentiæ quidem FABCD angulus FED inſiſtit, circumferentiæ vero EDCBA inſiſtit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF eſt [g] æqualis. ſimiliter oſtendentur & reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim æquales utrique ipſorum AFE FED. ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonum. oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe: & deſcriptum eſt circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.



[a] Cor. 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi.
[d] 15. primi.
[e] 26. tertii.
[f] 29. tertii.
[g] 27. tertii.

Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus, ei quæ eſt ex centro circuli æquale eſſe. & ſi per puncta ABCDEF contingentes circulum ducamus, circa circulum deſcribetur hexa-

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, consequenter iis quæ in pentagono dicta sunt: & præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, & circumscribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D. oportet in A B C D circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Sit A C latus trianguli [a] quidem æquilateri in ipso circulo A B C D * descripti, pentagoni [b] vero æquilateri latus A B, quarum igitur partium est A B C D F circulus quindecim, earum circumferentia quidem A B C, tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero A B, quæ quinta est circuli, erit trium. ergo reliqua B C est duarum. secetur B C bifariam in puncto E [c]. quare utraque ipsarum B E E C circumferentiarum quintadecima pars est A B C D circuli. si igitur jungentes B E E C, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo [d] A B C D aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum erit. Quod facere oportebat.

[a] 2. huju[s]
[b] 11. huju[s]
[c] 30. tertii
[d] 1. hujus



Similiter autem iis quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper dato quindecagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribemus, & circumscribemus.

---

* *Facillimè describitur latus* A C *per prop. præced. si enim duo latera hexagoni circulo inscribantur ab* A *versus* C, *horum opposita extrema incident in puncta* A, C *extrema lateris trianguli quæsiti.*

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

PArs eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex eſt major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio ſeu ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter ſe magnitudines dicantur, quæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.

V.

In eadem proportione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, ſecundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà ſuperant, vel unà æquales ſunt, vel unà deficiunt, inter ſe comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ea magnitudinum Proportionalium definitio vulgo apud Interpretes traditur, quam Euclides in Elemento ſeptimo, pro numeris ſolum poſuit. ſcil.

Magnitudines dicuntur eſſe proportionale, quando Prima Secundæ & Tertia Quartæ æquemultiplex eſt, vel eædem partes.

Sed hæc definitio Numeris & quantitatibus commenſurabilibus tantum competit; Adeoque cum Univerſalis non ſit, recte ab Euclide in hoc elemento omnium Proportionalium proprietates tradituro rejicitur; & alia generalis ſubſtituitur cuivis magnitudinum ſpeciei congruens. Interim multum laborant Interpretes ut Definitionem hîc loci ab Euclide expoſitam, ex vulgo recepta numerorum Proportionalium definitione demonſtrent; ſed facilius multo hæc ab illa fluit quam illa ab hac. Quod ſic oſtendetur.

Primo *Sint* A B C D *quatuor magnitudines quæ ſunt in eadem ratione; prout in definitione* 5[ta] *magnitudines in eadem ratione eſſe exponuntur. Sitque Prima multiplex ſecundæ, dico & tertiam eandem eſſe multiplicem Quartæ. Sit ex gr.* A *æqualis* 5 B. *erit* C *æqualis* 5 D. *Capiatur numerus quilibet v. gr.* 2. *per quem multiplicitur* 5 *& productus ſit* 10: *Et magnitudinum* A *&* C *Primæ & Tertiæ capiantur æque multiplices*

A:	B::	C:	D
2A	10B	2C	10D

2A 2C. *Item magnitudinum* B *&* D *Secundæ & Quartæ capiantur æque multiplices* 10 B, *&* 10 D. *Et per defin. quintam, ſi* 2A *ſint æquales* 10 B, *erint* 2 C. *æquales* 10 D. *at quia* A *eſt quintuplex ex hypotheſi ipſius* B, *erunt* 2A *æquales* 10 B. *unde &* 2C *æquales* 10D. *&* C *æqualis* 5D, *hoc eſt erit* C *quintuplex ipſius* D *q. e. d.*

 Secundo

Secundo. *Si* A *ſit pars quævis ipſius* B, *erit* C *eadem pars ipſius* D. *Nam quia eſt* A *ad* B. *ſicut* C *ad* D. *cumque* A *ſit pars quædam ipſius* B, *erit* B, *multiplex ipſius* A; *adeoque per priorem caſum* D *erit eadem multiplex ipſius* C *& proinde* C *eadem pars erit magnitudinis* D *ac eſt* A *ipſius* B. *q. e. d.*

Tertio. *Sit* A *æqualis quotlibet quarumvis partium ipſius* B. *dico &* C *eſſe æqualem totidem ſimilium partium ipſius* D. *v. gr.* A *in ſe contineat quartam partem ipſius* B *quinquies; hoc eſt, ſit* A *æqualis* $\frac{5}{4}$B, *dico &* C *eſſe æqualem* $\frac{5}{4}$D. *Nam quoniam* A *eſt æqualis* $\frac{5}{4}$B; *multiplicando utramque per* 4, *erunt* 2A *æquales* 5B. *Capiantur itaque æque multiplices Primæ & Tertiæ ſcil.* 4A *&* 4C; *item aliæ æque multiplices Secundæ & Quartæ ſcil.* 5B 5D. *& per definitionem, ſi* 4A *ſint æquales* 5B, *erunt* 4C *æquales* 5D. *at oſtenſum eſt* 4A *æquales eſſe* 5B. *adeoque &* 4C *æquales erunt* 5D, *&* C *æqualis* $\frac{5}{4}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.

4A 5B 4C 5D

Univerſaliter ſit A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *multiplicentur enim* A *&* C *per* m. *Et* B *&* D *per* n. *Et quoniam eſt* A *æqualis* $\frac{n}{m}$B, *erit* mA *æqualis* nB; *unde per def.* 5tam *erit* mC *æqualis* nD; *&* C *æqualis* $\frac{n}{m}$D. *q. e. d.*

A: B:: C: D.

mA nB mC nD

VII.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex vero tertiæ non ſuperaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſecundam majorem proportionem habere dicitur quam tertia ad quartam.

VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum conſiſtit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus quàm habet ad ſecundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere proportionem dicetur ejus quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps, una amplius, quoad analogia proceſſerit.

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conſequentem.

XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis unà cum conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem.

XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

XVIII.

Ex æquo ſive ex æqualitate ratio eſt, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur & in eadem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, eſt ſumptio extremarum per ſubtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, & aliis ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

Ejuſdem ſive æqualium æque multiplices inter ſe æquales ſunt.

II.

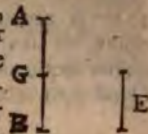
Quarum eadem æque multiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æque multiplices, & ipſæ inter ſe ſunt æquales.

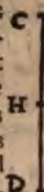
PROPOSITIO. I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB CD, quotcunque magnitudinem E F, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque mul-

multiplices. dico quotuplex eſt A B ipſius E, totuplices eſſe & A B C D ſimul ipſarum E F ſimul. Quoniam enim A B æque multiplex eſt ipſius E, ac C D ipſius F; quot magnitudines ſunt in A B æquales ipſi E, tot erunt & in C D æquales ipſi F. dividatur A B quidem in partes ipſi E æquales, quæ ſint A G G B; & C D dividatur in partes æquales ipſi F, videlicet C H H D. erit igitur multitudo partium C H H D æqualis multitudini ipſarum A G G B. & quoniam A G eſt æqualis E, & C H æqualis F; erunt & A G C H æquales [a] ipſis E F. eadem ratione quoniam G B eſt æqualis E, & H D ipſi F; erunt G B H D æquales [a] ipſis E F. quot ſunt itaque in A B æquales ipſi E, tot ſunt & in A B C D æquales ipſis E F. ergo quotuplex eſt A B ipſius E, totuplices erunt & A B C D ſimul ipſarum E F ſimul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonſtrare oportebat



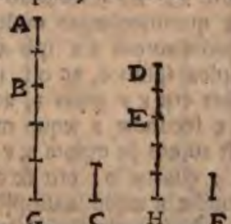


[a] Axiom. primi.

PROP. II. THEOR.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex ac ſexta quartæ; erit etiam compoſita prima cum quinta ſecundæ æque multiplex ac tertia cum ſexta quartæ.

Sit prima A B ſecundæ C æque multiplex, ac tertia D E quartæ F. ſit autem & quinta B G ſecundæ C æque multiplex, ac ſexta E H quartæ F. dico & compoſitam primam cum quinta ſcil. A G ſecundæ C æque multiplicem eſſe, ac tertiam cum ſexta ſc. D H quartæ F. Quoniam enim A B æque multiplex eſt C, ac D E ipſius F; quot magnitudines ſunt in A B æquales C, tot erunt & in D E æquales F. eadem ratione & quot ſunt in B G æquales C, tot & in E H erunt æquales F. quot igitur ſunt in tota A G æquales C, tot erunt & in tota D H æquales F. ergo quotuplex eſt A G ipſius C, totuplex eſt & D H

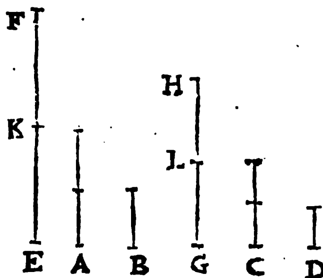


DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æquè multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices EF GH. dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, ac LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem & quinta KF secundæ B æque multiplex ac sexta LH quartæ D: erit & composita prima cum quinta EF, secundæ B æque multiplex [a], ac tertia cum sexta GH, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.



a 2. hujus.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habet proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ.

Prima A ad ſecundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & ſumantur ipſarum quidem A C utcunque æque multiplices E F; ipſarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H. dico E ad G ita eſſe ut F ad H. Sumantur rurſus ipſarum E F æque multiplices K L, & ipſarum G H æque multiplices M N. quoniam igitur E æque multiplex eſt ipſius A, atque F ipſius C; ſumuntur autem ipſarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex [a] ipſius A, atque L ipſius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. & quoniam eſt ut A ad B ita C ad D. ſumptæ autem ſunt ipſarum A C æque multiplices K L; & ipſarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: ſi [b] K ſuperat M, ſuperabit & L ipſam N; & ſi æqualis æqualis; & ſi minor minor. ſuntque K L quidem ipſarum E F æque multiplices; M N vero ipſarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad G ita [c] erit F ad H. quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices ſecundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 3. hujus.

[b] 5. Defin. hujus.

[c] 5. Defin.

Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, & L ipſam N ſuperare; & ſi æqualis, æqualem eſſe, & ſi minor, minorem:

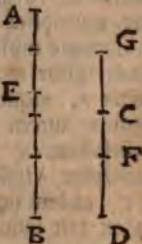
minorem; constat etiam si M superarat K, & N superare ipsam L; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac
c 5. Defin. hujus. propterea ut G ad E c ita esse H ad F.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

Magnitudo A B magnitudinis C D æque multiplex sit atque ablata A E ablatæ C F. dico & reliquam E B reliquæ F D æque multiplicem esse atque totam A B totius C D; Quotuplex enim est A E ipsius C F, totuplex fiat & E B ipsius C G. & quoniam A E æque multiplex est C F atque E B
a 1. hujus. ipsius C G; erit a A E æque multiplex C F, ac A B ipsius G F; ponitur autem æque multiplex A E ipsius C F, ac A B ipsius C D. æque multiplex igitur est A B utriusque G F
b 2. Axiom. hujus. C D; ac propterea G F ipsi C D est b æqualis. communis auferatur C F. reliqua igitur G C æqualis est reliquæ D F. itaque



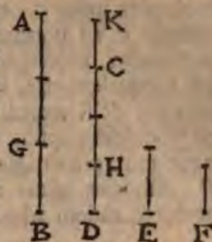
quoniam A E æque multiplex est C F, ac E B ipsius C G, estque C G æqualis D F; erit A E æque multiplex C F, ac E B ipsius F D. æque multiplex autem ponitur A E ipsius C F, ac A B ipsius C D. ergo E B est æque multiplex F D, ac A B ipsius C D. & reliqua igitur E B reliquæ F D æque multiplex est, atque tota A B totius C D. Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ: & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VI. THEOR.

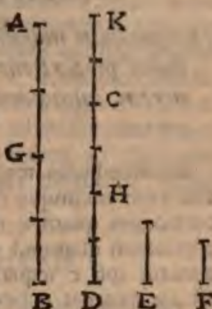
Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Duæ magnitudines A B C D duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablatæ A G C H earundem sint æque multiplices. dico & reliquas G B H D vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primo G B æqualis E. dico & H D ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis C K. & quoniam A G æque multiplex est E ac C H ipsius F; estque G B quidem æqualis E; C K vero æqualis F: erit A B æque multiplex [a] E, ac K H ipsius F. æque autem multiplex ponitur A B ipsius E, ac C D ipsius F. ergo K H æque multiplex est F, ac C D ipsius F. quoniam igitur utraque ipsarum K H C D est æque multiplex F, erit K H æqualis [b] C D. communis auferatur C H. ergo reliqua K C reliquæ H D est æqualis. sed K C est æqualis F. & H D igitur ipsi F est æqualis; ideoque G B ipsi E, & H D ipsi F æqualis erit. similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E; & H D ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.



[a] 2. hujus.



[b] 1. Axiom hujus.

PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magnitudo C. dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramque A B similiter eandem habere proportionem. Sumantur ipsarum A B æque multiplices D E, & ipsius C alia utcunque multiplex F. quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, ac E ipsius B, estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis [a] E; alia autem utcunque est F. ergo si D superat F, & E ipsam F superavit, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E qui-



[a] 1. Axiom hujus.

dem

dem ipsarum A B æque multiplices: F vero alia utcunque multiplex ipsius C. erit igitur [b] ut A ad C. ita B ad C. dico insuper C ad utramque ipsarum A B eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; D E vero aliæ utcunque æque multiplices ipsarum A B. ergo [a] ut C ad A, ita erit C ad B. Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

[b] 5. Defin. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor. & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines, A B, C, & sit A B major. sit alia vero utcunque D. dico A B ad D majorem habere proportionem quam C ad D. & D ad C majorem habere proportionem quam ad A B. Quoniam A B major est quam C, ponatur ipsi C æqualis B E, hoc est A B excedat C per A E. itaque A E aliquoties multiplicata major [a] erit quam D. multiplicetur A E quoad fiat major quam D. sitque ipsius multiplex F G ipsa D major. quotuplex autem est F G ipsius A E, totuplex fiat G H ipsius E B, & K ipsius C. sumatur etiam ipsius D dupla quidem L, tripla P, & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D, fiat prima quæ sit major quam K; sit illa N. sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N. quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K; erit M non major quam K, hoc est K non erit minor quam M. & cum æque multiplex sit F G ipsius A E ac G H ipsius E B. erit F G æque multiplex A E ac F H ipsius A B [b]. æque autem multiplex est F G ipsius A E ac K ipsius C, ergo F H æque multiplex est A B, ac K ipsius C; hoc est F H K ipsarum A B & C sunt

[a] 4. Def. hujus.

[b] 1. hujus.



ſunt æque multiplices. rurſus quoniam G H æque multiplex eſt ipſius E B ac K ipſius C, eſtque E B æqualis C erit & G H ipſi K æqualis [c]. ſed K non minor eſt quam M. non igitur G H minor erit quam M, ſed eſt F G major quam D, ergo tota F H major erit quam M & D. ſed M & D ſimul ſunt æquales ipſi N, quia M eſt multiplex ipſius D ipſi F proxime minor, quare F H major erit quam N. unde cum F H ſuperat N, K vero ipſam N non ſuperat, & ſunt F H & K æque multiplices ipſarum A B & C, & eſt N ipſius D alia multiplex, ergo [d] A B ad D majorem rationem habebit quam C ad D. Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad A B. iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero F H non ſuperare. atque eſt N multiplex ipſius D, & F H K aliæ utcunque ipſarum A B C æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet [d], quam D ad A B. Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor. & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem. Quod oſtendere oportebat.

c 1. Axiom. hujus.

d 7. Defin. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eandem proportionem habent ad eandem, inter ſe ſunt æquales; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipſæ etiam inter ſe ſunt æquales.

Habeat enim utraque ipſarum A B ad C eandem proportionem. dico A ipſi B æqualem eſſe. nam ſi non eſſet æqualis, non haberet [a] utraque ipſarum A B ad eandem, eandem proportionem. habet autem. æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad utramque ipſarum A B eandem proportionem. dico A æqualem eſſe ipſi B. niſi enim ita ſit, non [a] habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales. Quod demonſtrare oportebat.

A

C

B

a 8. hujus.

PROP.

PROP. X. THEOR.

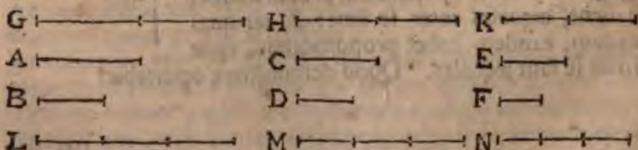
Magnitudinum proportionem habentium ad eandem, quæ majorem proportionem habet, illa major eſt; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor eſt.

Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. dico A quam B majorem eſſe. ſi enim non eſt major, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autem non eſt A ipſi B utraque enim ipſarum A B ad C eandem habe-
7. hujus. ret [a] proportionem. atqui eandem non habet. non eſt igitur A ipſi B æqualis. ſed
8. hujus. neque minor eſt quam B, haberet [b] enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem. non igitur A minor eſt, quam B. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem. ergo A quam B major erit. Habeat rurſus C ad B majorem proportionem quam C ad A. dico B minorem eſſe quam A. ſi enim non eſt minor, vel æqualis eſt, vel major. æqualis utique non eſt B ipſi A, etenim C ad utramque ipſarum A B eandem proportionem [a] haberet. non habet autem. ergo A ipſi B non eſt æqualis. ſed neque major eſt B quam A, haberet enim C ad B minorem [b] proportionem quàm ad A. atqui non habet. non eſt igitur B major quam A. oſtenſum autem eſt neque æqualem eſſe. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium, quæ majorem proportionem habet, illa major eſt; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor eſt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe eædem ſunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. dico ut A ad B, ita eſſe E ad F. ſumantur enim ipſa-



rum quidem A C E æque multiplices G H K; ipſarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur

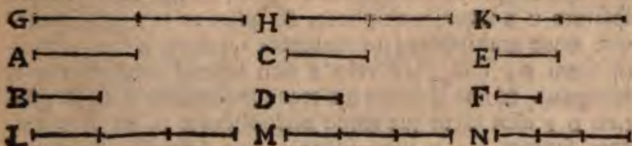
tur eſt ut A ad B, ita C ad D, & ſumptæ ſunt ipſarum A C æque multiplices G H, & ipſarum B D aliæ utcunque æque multiplices L M; ſi [a] G ſuperat L, & H ipſam M ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. rurſus quoniam eſt ut C ad D, ita E ad F, & ſumptæ ſunt ipſarum C E æque multiplices H K, ipſarum vero D F aliæ utcunque æque multiplices M N; ſi [a] H ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed ſi H ſuperat M, & G ſuperabit L; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor minor; quare ſi G ſuperat L, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt G K quidem ipſarum A E æque multiplices; L N vero ipſarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo [a] ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe eædem ſunt. Quod oſtendiſſe oportuit.

[a] 5. Def. hujus.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita ſit C ad D, & E ad F. dico ut A ad B, ita eſſe A C E ad B D F. ſumantur enim ipſarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipſarum B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita eſt C ad D, & E ad F, & ſumptæ ſunt ipſarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipſarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N; ſi [a] G ſuperat L, & H ipſam M ſuperabit, & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quare & ſi G ſuperat L, ſuperabunt & G H K ipſas L M N; & ſi æqualis, æquales; & ſi minor, minores. ſuntque G, & G H K ipſarum A, & A C E æque multiplices, quoniam ſi fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices [b] erunt & omnes omnium. Et eadem ratione L & L M N ipſarum B, & B D F ſunt æque multiplices. eſt igitur [a] ut A ad B, ita

[a] 5. Def. hujus.
[b] 1. hujus.

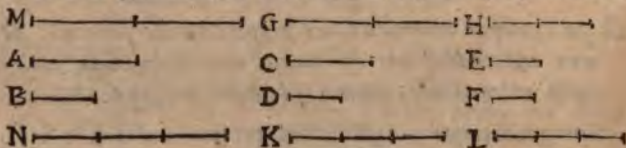
A C E

A C E ad B D F. Quare ſi quotcunque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam majorem habebit proportionem quam quinta ad ſextam.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem quam quinta E ad ſextam F. dico & primam A ad ſecundam B majorem proportionem



habere, quam quintam E ad ſextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet quam E ad F, ſunt quædam ipſarum C E æque multiplices, & ipſarum D F aliæ utcunque æque multiplices; ut multiplex [a] quidem C ſuperet multiplicem D; multiplex vero E non ſuperet multiplicem F. ſumantur. & ſint ipſarum C E æque multiplices G H, & ipſarum D F aliæ utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem ſuperet K: H vero ipſam L non ſuperet: & quotuplex eſt G ipſius C, totuplex ſit & M ipſius A; quotuplex autem K ipſius D, totuplex ſit & N ipſius B. & quoniam eſt ut A ad B ita C ad D, & ſumptæ ſunt ipſarum A C æque multiplices M G, & ipſarum B D aliæ utcunque æque multiplices N K: ſi [b] M ſuperat N, & G ipſam K ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed G ſuperat K. ergo & M ipſam N ſuperabit. H vero non ſuperat L. ſuntque M H ipſarum A E æque multiplices, & N L ipſarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo A ad B majorem proportionem habebit [a] quàm E ad F. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam majorem habebit proportionem quam quinta ad ſextam. Quod oſtendere oportebat.

[a] 7. Def. hujus.

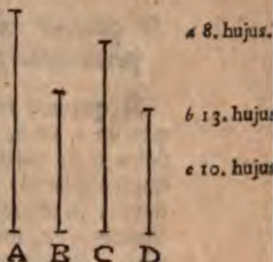
[b] 5. Def. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia: & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quàm C. dico & B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, & alia est utcunque magnitudo B, habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit [b] proportionem quàm C ad B. ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [c] est. quare D est minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. similiter demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem; & si A sit minor quam C, & B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quàm tertia, & secunda quàm quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.



a 8. hujus.
b 13. hujus
c 10. hujus

PROP. XV. THEOR.

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices.

Sit enim A B æque multiplex C, ac D E ipsius F. dico ut C ad F, ita esse A B ad D E. Quoniam enim æque multiplex est A B ipsius C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi C, totidem erunt & in D E æquales F. dividatur A B in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint A G G H H B; & D E dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in D K K L L E; erit igitur ipsarum A G G H H B multitudo æqualis multitudini D K K L L E. & quoniam æquales sunt A B G H H B, suntque D K K L



H LE

a 7. hujus. L E inter se æquales; ut A G ad D K, ita [a] erit G H ad K L, &
b 12. hujus. H B ad L E. atque erit [b] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut A G ad D K, ita A B ad D E. sed A G ipsi C est æqualis, & D K ipsi F. ergo ut C ad F, ita erit A B ad D E. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices. Quod ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Si quatuor magnitudines proportionales A B C D, sitque ut A ad B, ita C ad D: dico & permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A B æque multiplices E F, ipsarum vero C D aliæ utcunque æque multiplices G H. & quoniam æque multiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem

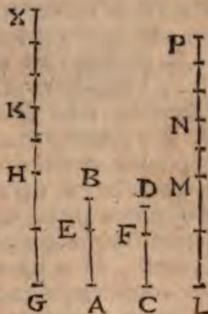
a 15. hujus. inter se comparatæ eandem habent [a] proportionem quam habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F. ut
b 11. hujus. autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita [b] E ad F. rursus quoniam G H sunt ipsarum C D æque multiplices, partes autem inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æque multiplices; erit [a] ut C ad D ita G ad H. sed ut C ad D ita E ad F. ergo [b] & ut E ad F ita G ad H. quod si quatuor magnitudines proportionales
c 14. hujus. sint, prima autem major sit quàm tertia; [c] & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; suntque E F ipsarum A B æque multiplices, & C H ipsarum C D aliæ utcunque æque mul-
d 5. Def. tiplices, ergo [d] ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales A B B E C D D F. hoc est ut A B ad B E, ita sit C D ad D F. dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut A E ad E B ita esse C F ad F D. sumantur enim ipsarum quidem A E E B C F F D æque multiplices G H H K L M M N, ipsarum vero E B F D aliæ utcunque æque multiplices K X N P. Quoniam æque multiplex est G H ipsius A E, ac H K ipsius E B; erit [a] G H ipsius A E æque multiplex, ac G K ipsius A B. æque autem multiplex est G H ipsius A E, ac L M ipsius C F. ergo G K æque multiplex est A B, ac L M ipsius C F. rursus quoniam æque multiplex est L M ipsius C F, ac M N ipsius F D; erit [a] L M æque multiplex C F, ac L N ipsius C D. sed æque multiplex erat L M ipsius C F, ac G K ipsius A B. æque igitur multiplex est G K ipsius A B, ac L N ipsius C D. quare G K L N ipsarum A B C D æque multiplex erunt. rursus quoniam æque multiplex est H K ipsius E B, ac M N ipsius F D: est autem & K X ipsius E B æque multiplex, ac N P ipsius F D; & composita H X ipsius E B æque multiplex est [b] ac M P ipsius F D. quare cum sit ut A B ad B E, ita C D ad D F; & sumptæ sint ipsarum quidem A B C D æque multiplices G K L N, ipsarum vero E B F D aliæ utcunque æque multiplices H X M P: si [c] G K superat H X, & L N superat M P; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur G K ipsam H X, communique ablata H K, & G H ipsam K X superabit. sed si G K superat H X, & L N superat M P: itaque superat L N ipsam M P: communique M N ablata, & L M superabit N P. quare si G H superat K X, & L M ipsam N P superabit. similiter demonstrabimus & si G H sit æqualis K X, & L M ipsi N P esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem G H L M ipsarum A E C F æque multiplices, & ipsarum E B F D aliæ utcunque æque multiplices K X N P. ergo [c] ut A E ad E B ita erit C F ad F D. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 1. hujus.

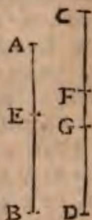
[b] 2. hujus.

[c] 5. Def. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

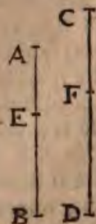
Sint divisæ magnitudines proportionales AE EB CF FD: hoc est ut AE ad EB, ita CF ad FD. dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit ut AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm FD, vel ad majorem. sit primo ad minorem, nempe ad DG. & quoniam est ut AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales
a 17. hujus. erunt [a]. est igitur ut AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autem ut AE ad EB, ita CF ad
b 11. hujus. FD. quare & [b] ut CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima major est quam tertia CF. ergo & secunda
c 14. hujus. DG quàm quarta DF major [c] erit. sed & minor, quod fieri non potest. Non igitur est ut AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad majorem quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. dico & reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD. Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD, ita
a 16. hujus. AE ad CF. & permutando erit [a] ut AB ad AE, ita CD ad CF. quoniam vero compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ
b 17. hujus. proportionales erunt [b], ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC: rursusque permutando ut [a] BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut AE ad CF,
c 11. hujus. ita posita est AB ad CD. & reliqua [c] igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.



Cor.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales ſint, per converſionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, erit permutando AB ad CD, ita BE ad ablatam DF, erit & reliqua AE ad reliquam CF, ut tota AB ad totam CD. quare rurſus permutando & invertendo erit ut AB ad AE, ita CD ad CF. quod eſt per converſionem rationis.

PROP. XX. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ex æquali autem prima major ſit, quam tertia: & quarta quàm ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales D E F binæ ſumptæ ſint in eadem proportione; ſitque ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F; ex æquali autem major ſit A quam C. dico & D quam F majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. Quoniam enim A major eſt quàm C, alia vero eſt utcunque B, & major ad eandem majorem habet [a] proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. ſed ut A ad B, ita D ad E; & invertendo ut C ad B, ita F ad E. ergo & D ad E majorem habet proportionem quam F ad E. ad eandem vero proportionem habentium, quæ majorem habet proportionem, illa major [b] eſt. major igitur eſt D quam F. ſimiliter oſtendemus & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F æqualem eſſe; & ſi minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima major ſit quam tertia; & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod oſtendere oportebat.



[a] 8. hujus

[b] 10. hujus

PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ & in eadem proportione. sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit quam C. dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit; [a] A ad B majorem proportionem quam C ad B. sed ut A ad B, ità E ad F: & invertendo ut C ad B, ita E ad D. quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa minor est [b]. minor igitur est F quam D; ac propterea D quam F major erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor minor. Quod demonstrare oportebat.

[a] . hujus.
[b] o. hujus.





PROP. XXII. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ in eadem proportione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. dico & ex æquali in eadem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero B E aliæ utcunque æque multiplices

plices K L, & ipſarum C F aliæ utcunque æque multiplices M N. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum A D æque multiplices G H, & ipſarum B E aliæ utcunque æque multiplices K L; erit ut [a] G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum ſint tres magnitudines G K M, & aliæ ipſis numero æquales H L N, binæ ſumptæ & in eadem proportione; ex æquali [b] ſi G ſuperat M, & H ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuntque G H ipſarum A D æque multiplices, & M N ipſarum C F aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur A ad C, ita erit [c] D ad F. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.



a 4. hujus

b 20. hujus

c 5. Defin. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales, binæ ſumptæ in eadem proportione, D E F; ſit autem perturbata earum analogia, hoc eſt ſit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. dico ut A ad C, ita eſſe D ad F. Sumantur ipſarum quidem A B D æque multiplices G H L: ipſarum vero C E F aliæ utcunque æque multiplices K M N. & quoniam G H æque multiplices ſunt ipſarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque

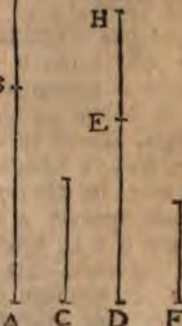


a 15. hujus. ipſarum multiplices: erit a ut A ad B, ita G ad H. & ſimili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque eſt ut A ad B, ita E ad
b 11. hujus. F. ut b igitur G ad H, ita M ad N. rurſus quoniam eſt ut B ad C ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum B D æque multiplices H L, ipſarum vero C E aliæ utcunque æque multiplices K M: erit ut H ad K, ita L ad M. oſtenſum autem eſt & ut G ad H, ita eſſe M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales ſunt G H K, & aliæ ipſis numero æquales L M N, binæ ſumptæ in eadem proportione, eſtque ipſarum perturbata
c 21. hujus. analogia; ex æquali, ſi c G ſuperat K, & L ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſunt autem G L ipſarum A D æque multiplices: & K N æque multipli-
d 5. Def. quinti. ces ipſarum C F. ut igitur d A ad C, ita erit D ad F. Quare ſi fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam: & compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum ſexta ad quartam.

Prima A B ad ſecundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. habeat autem & quinta B G ad ſecundam C proportionem eandem quam ſexta E H ad quartam F, dico & compoſitam primam cum quinta A G ad ſecundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum ſexta D H ad quartam F. Quoniam enim eſt ut B G ad C, ita E H ad F; erit invertendo ut C ad B G, ita F ad E H. & quoniam ut A B ad C, ita eſt D E ad F: ut autem C ad B G, ita
a 22. hujus. F ad E H; erit a ex æquali ut A B ad B G, ita D E ad E H. quod cum diviſæ magnitudines ſint proportionales, & com-
b 18. hujus. poſitæ proportionales b erunt. ut igitur A G ad G B, ita eſt D H ad H E. ſed &
c hypoth. ut c G B ad C, ita H E ad F. ergo, ex a æquali, ut A G ad C, ita erit



erit DH ad F. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad ſecundam proportionem eandem quam ſexta ad quartam: & compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit quam tertia cum ſexta ad quartam. Quod oſtendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; & ſit ut AB ad CD, ita E ad F. ſit autem maxima ipſarum AB, & F minima. dico AB & F ipſis CD E majores eſſe. ponatur enim ipſi quidem E æqualis AG, ipſi vero F æqualis CH. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita E ad F: eſtque AG æqualis E, & CH æqualis F; erit ut AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam eſt ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam erit CH; & reliqua GB ad reliquam HD [a] ut tota AB ad CD totam. major autem eſt AB quam CD. ergo & GB quam HD major erit. quod cum AG ſit æqualis ipſi E, & CH ipſi F; erunt AG & F ipſi CH & E æquales. ſi autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus exiſtentibus, quippe cum GB ſit major, ſi ipſi quidem GB addantur AG & F, ipſi vero HD addantur CH & E: fient AB & F, ipſis CD & E neceſſario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonſtrare oportebat.

[a] 19. hujus.

B G D H A C E F

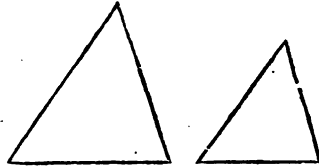
EUCLIDIS.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

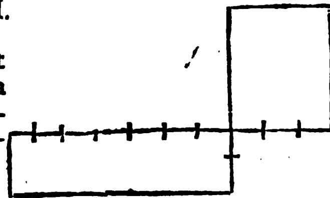
I.

Similes figuræ rectilineæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum fuerint termini.



III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.



V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO. I.

THEOREMA.

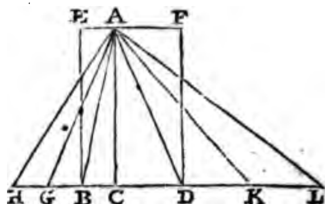
Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ABC ACD, parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur BD ex utraque parte ad puncta HL, & ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponantur quotcunque æquales DK KL, & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter [a] se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est [a] æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet



a 38.prim

videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia utcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur [b] ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum est [c] parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum [c], partes [d] autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit [e] ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.



b Def. 5. quinti.
c 41. primi.
d 15. quinti.
e 11. quinti.

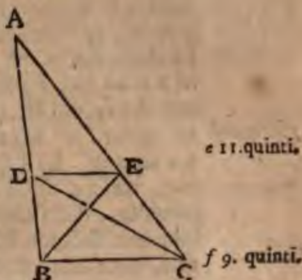
PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera, & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA. jungantur BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est [a] æquale, in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DF & BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habent [b] proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [c] est BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & igitur ut BD ad DA, ita est [d] CE ad EA. Et si trianguli ABC latera AB AC pro-

a 37. primi.
b 7. quinti.
c 1. hujus.
d 11. quinti.

proportionaliter secta sunt, *i. e.* ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; jungatur DE. dico DE ipsi BC parallelam esse. iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita [e] est BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum [e] ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [e] CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum [f] triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem [g] sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.

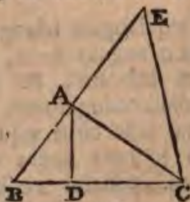


e 11. quinti.
f 9. quinti.
g 39. primi.

PROP. III. THEOR.

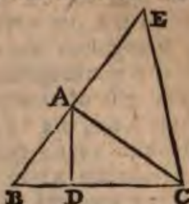
Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam [a] recta linea AD. dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur per C ipsi DA parallela [b] CE, & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit [c] ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea



a 9. primi.
b 31. primi.
c 29. primi.

linea B A E incidit, exterior angulus B A D æqualis eſt *c* interiori A E C. oſtenſus autem eſt & angulus A C E angulo B A D æqualis. ergo & A C E ipſi A E C æqualis erit: ac propterea
d 6. primi. latus A E æquale *d* lateri A C. & quoniam uni laterum trianguli B C E, videlicet ipſi E C
e 2. hujus. parallela ducta eſt A D; erit *e* ut B D ad D C, ita B A ad A E; æqualis autem eſt A E ipſi A C.
f 7. quinti. eſt igitur *f* ut B D ad D C, ita B A ad A C. Et ſi ſit ut B D ad D C, ita B A ad A C, & A D jungatur. dico angulum B A C



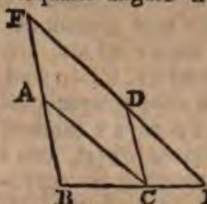
bifariam ſectum eſſe recta linea A D. iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut B D ad D C, ita B A ad A C; ſed & ut
g 2. hujus. B D ad D C, ita *g* B A ad A E, etenim uni laterum trianguli
h 11. quinti. B C E, videlicet ipſi E C parallela ducta eſt A D, erit *h* & ut
i 9. quinti. B A ad A C, ita B A ad A E. ergo A C eſt *i* æqualis A E, ac
k 5. primi. propterea & angulus A E C angulo A C E *k* æqualis. ſed angulus quidem A E C eſt æqualis angulo exteriori B A D; angulus
l 29. primi. gulus vero A C E æqualis *l* alterno C A D. quare & B A D angulus ipſi C A D æqualis erit. angulus igitur B A C bifariam ſectus eſt recta linea A D. Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea etiam baſim ſecet; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & ſi baſis partes eandem proportionem habent, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit. Qnod oportebat demonſtrare.

PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos ſunt, proportionalia ſunt. & homologa, ſive ejuſdem rationis ſunt latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Sint æquiangula triangula A B C D C E, quæ angulum quidem A B C angulo D C E, angulum vero A C B angulo D E C æqualem habeant, & præterea angulum B A C angulo C D E: dico triangulorum A B C D C E proportionalia eſſe latera qnæ ſunt circa æquales angulos; & homologa, ſive ejuſdem rationis latera eſſe quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. ponatur B C in directum ipſi C E. Et quoniam
a 17. primi. anguli A B C A C B duobus rectis minores *a* ſunt, æqualis autem eſt angulus A C B angulo D E C; erunt A B C D E C anguli

guli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se conveniant [b]; producantur, & conveniant in puncto F. & quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC; erit [c] BF ipsi DC parallela. rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela [c] erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est [d] æqualis. & quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit [e] ut BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. ut igitur BA ad CD. ita BC ad CE, & permutando ut BA ad BC ita CD ad CE. rursus quoniam CD parallela est BF, erit [e] ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est æqualis AC. ergo ut [f] BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED: erit [g] ex æquali; ut BA ad AC ita CD ad DE. Æquiangulorum igitur trirngulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa, sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. Quod demonstrare oportebat.

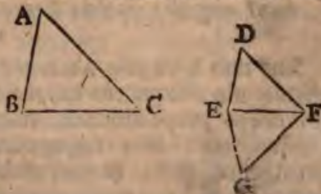


[b] 12. axiomi. primi.
[c] 28. primi.
[d] 34. primi.
[e] 2. hujus.
[f] 7. quinti.
[g] 22. quinti.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

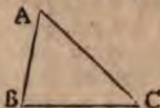
Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF: ut autem BC ad CA, ita EF ad FD: & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & præterea angulum BAC angulo EDF. Constituatur enim [a] ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus



[a] 23. primi.

b 2.Cor.32. primi. gulus E F G. quare reliquus B A C angulus b reliquo E G F est æqualis. ideoque æquiangulum est triangulum A B C triangulo E G F. triangulorum igitur A B C E G F proportionalia sunt latera quæ æqualibus angulis subtendunt. ergo ut A B ad B C c, ita G E ad E F. sed ut A B ad B C, ita D E ad E F. ut igitur D E ad E F, ita d G E ad E F. quod cum utraque ipsarum D E E G ad E F eandem proportionem habeat, erit e D E ipsi E G æqualis. Eadem ratione & D F æqualis F G. itaque quoniam D E est æqualis E G, communis autem E F; duæ D E E F duabus G E E F æquales sunt, & basis D F basi F G æqualis. angulus igitur D E F est æqualis f angulo G E F, & D E F triangulum æquale triangulo G E F, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem D E F est æqualis angulo G E F, angulus vero E D F æqualis angulo E G F; & quoniam angulus D E F est æqualis angulo G E F, & angulus G E F angulo A B C, erit & angulus A B C angulo F E D æqualis. eadem ratione & angulus A C B æqualis est angulo D F E, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo A B C triangulum triangulo D E F æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.

c 4. hujus. d 11. quinti. e 9. quinti. f 8. primi.





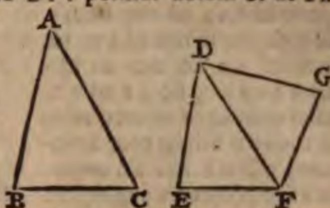
PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula A B C D E F, unum angulum B A C uni angulo E D F æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, hoc est, sit ut B A ad A C, ita E D ad D F. dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum esse, & angulum quidem A B C habere æqualem angulo D E F; angulum vero A C B angulo D F E. Constituatur a enim ad rectam lineam D F, & ad puncta in ipsa D F, alterutri angulorum B A C E D F æqualis angulus F D G, angulo autem A C B æqualis D F G. reliquus igitur

a 23. primi.

igitur ad B reliquo ad G est [b] æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita [c] est GD ad DF: ponitur autem & ut BA ad AC, ita ED ad DF. ut igitur [d] ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis est [e] ipsi DG, & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales sunt & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est [f] æqualis basi FC, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG æqualis est angulo ACB: & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF, ergo & reliquus qui ad B æqualis [b] est reliquo ad E. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.



[b] 2. Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 9. quinti.
[f] 4. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

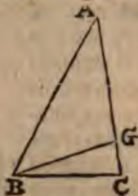
Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C F utrumque simul minorem vel non minorem recto. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit; sit major ABC: & constituatur [a] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B, angulo DEF æqualis angulus ABG. &

[a] 23. primi.

 quo-

quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero A B G angulo D E F: erit reliquus A G B reliquo D F E æqualis [b]. æquiangulum igitur est A B G triangulum triangulo D E F. quare ut [c] A B ad B G, sic D E ad E F: utque D E ad E F, sic ponitur A B ad B C. ut igitur A B ad B C, sic A B ad B G. quod cum A B ad utrumque B C B G eandem habeat proportionem, erit B C ipsi B G æqualis [d]: ac propterea angulus ad C est æqualis [e] angulo B G C. quare uterque angulorum B C G B G C minor est recto, igitur qui ei deinceps est A G B major est recto. atque ostensus est angulus A G B æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur non major: cum C non est major recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus A B C angulo D E F. ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis [b] reliquo qui ad F. æquiangulum igitnr est A B C triangulum triangulo D E F. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

b 2. Cor. 32. primi.
c 4. hujus.
d 9. quinti.
e 5. primi.



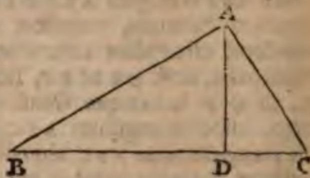


PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C: & à puncto A ad B C perpendicularis ducatur A D. dico triangula A B D A D C toti triangulo A B C, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus B A C est æqualis angulo A D B, rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus triangulis A B C A B D; erit [a] reliquus A C B reliquo B A D æqualis. æquiangulum igitur est triangulum A B C triangulo A B D. quare [b] ut B C quæ subtendit angulum rectum trianguli A B C, ad B A subtendentem

a 2. Cor. 32. primi.
b 4. hujus.



tem angulum rectum trianguli A B D, sic ipsa A B subtendens angulum ad C trianguli A B C, ad D B subtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet B A D ipsius A B D trianguli; & adhuc A C ad A D subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum A B C triangulo A B D æquiangulum est; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. simile igitur [c] est triangulum A B C triangulo A B D. eadem ratione demonstrabimus etiam A D C triangulum triangulo A B C simile esse. quare utrumque ipsorum A B D A D C toti A B C triangulo est simile. Dico insuper triangula A B D A D C etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus B D A rectus est æqualis recto A D C; sed & B A D ostensus est æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo D A C æqualis [a]. æquiangulum igitur est triangulum A B D triangulo A D C. ergo [b] ut B D trianguli A B D subtendens B A D angulum, ad D A trianguli A D C subtendentem angulum qui est ad C, æqualem angulo B A D, sic ipsa A D trianguli A B D subtendens angulum ad B, ad D C subtendentem angulum D A C ei qui est ad B æqualem; & adhuc B A ad A C subtendentem angulum rectum A D C. simile igitur est A B D triangulum triangulo A D C. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.

A
B D C

c 1. Def. hujus.

Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis: & præterea inter basim & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum, medium esse proportionale,

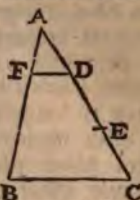
PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea A B. oportet ab ipsa A B imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea A C, quæ cum ipsa A B angulum quemlibet contineat; sumaturque in A C quodvis punctum D, & ipsi A D æquales [a] ponantur D E E C, deinde jungatur

a 3. primi

31.primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela [b] ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC,



2. hujus. parallela ducta est FD; erit [c] ut CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.

PROP. X. PROBL.

Datam ractam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC, oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. sit secta AC in punctis D & E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, junctaque BC per puncta qui-



31.primi. dem D & E ipsi BC parallelæ [a] ducantur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB: ac pro-
34.primi. pterea DH quidem est [b] æqualis FG, HK vero ipsi GB. & quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela
2. hujus. ducta est HE; erit [c] ut CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita [c] erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

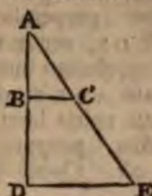
PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita ut angulum quemvis contineant, oportet ipsis AB AC

tertiam

tertiam proportionalem invenire. Producantur A B A C ad puncta D E: ponaturque ipsi A C æqualis B D; & juncta B C, ducatur [a] per D ipsi B C parallela D E. quoniam igitur uni laterum trianguli A D E, videlicet ipsi D E parallela ducta est B C, erit [b] ut A B ad B D, ita A C ad C E. æqualis autem est B D ipsi A C, ut igitur A B ad A C, ita est A C ad C E. quare datis rectis lineis A B A C tertia proportionalis inventa est C E. Quod facere oportebat.

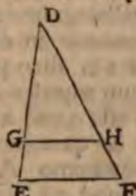


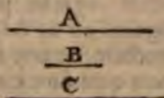
a 31.pri
b 2. huju

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipsis A B C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ D E D F angulum quemvis E D F continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis D G, ipsi vero B æqualis G E, & ipsi C æqualis D H: junctaque G H, per E ipsi parallela [a] ducatur E F. itaque quoniam uni laterum trianguli D E F, nimirum ipsi E F, parallela ducta est G H, erit ut D G ad G E ita [b] D H ad H F. est autem D G ipsi A æqualis; G E vero æqualis B, & D H æqualis C, ut igitur A ad B, ita C ad H F. quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inventa est H F. Quod facere oportebat.





a 31.pri
b 2. huj

PROP. XIII. PROBL.

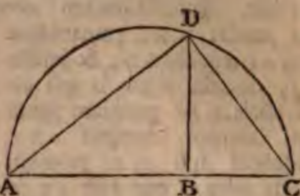
Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B B C. oportet inter ipsas A B B C mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa A C describatur semicirculus A D C, ducaturque [a] à puncto B ipsi A C ad rectos angulos B D, & A D D C jungantur. Quoniam igitur angulus A D C est in semicirculo, is rectus [b] est. & quoniam in triangulo rectan-

a 11.pr
b 31. te

gulo A D C, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est D B, erit D B media proportionalis [c] inter segmenta basis A B B C. duabus igitur datis rectis lineis A B B C media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.

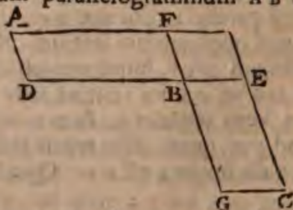
c Cor. 8. hujus.



PROP. XIV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma A B B C, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum D B B E. ergo & in
a 14. primi. directum [a] erunt F B B C. dico parallelogrammorum A B B C latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca esse: hoc est ut D B ad B E ita esse G B ad B F. Compleatur enim parallelogrammum F E. & quoniam parallelogrammum A B æquale est parallelogrammo B C, aliud autem aliquod est F E parallelogrammum, erit
b 7. quinti. ut A B ad F E [b], ita B C ad F E. sed ut A B quidem ad F E,
c 1. hujus. ita [c] est D B ad B E; ut autem B C ad F E, ita [c] G B ad B F; ut
d 11. hujus. igitur [d] D B ad B E, ita G B ad B F. ergo parallelogrammorum A B B C latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent. Et si reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quæ sunt circum æquales angulos, sit nempe ut D B ad B E, ita G B ad B F. dico parallelogrammum A B parallelogrammo B C æquale esse. quoniam enim est ut D B ad B E, ita G B ad B F, ut autem D B ad B E, ita [c] A B parallelogrammum ad parallelogrammum F E, & ut G B ad B F, ita [c] B C parallelogrammum ad parallelogramum F E; erit [d] &
e 9. quinti. ut A B ad F E, ita B C ad F E. æquale igitur est A B [e] parallelogrammum parallelogrammo B C. Ergo æqualium & unum uni

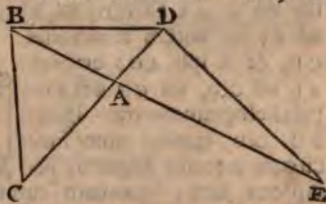


uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ſeu ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium augulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproca: Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

Sint æqualia triangula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum ſcilicet BAC angulo DAE. dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca eſſe, hoc eſt ut CA ad AD, ita eſſe EA ad AB. ponantur enim ita ut in directum ſit CA ipſi AD. ergo & EA ipſi AB in directum [a] erit; & jungatur BD. quoniam igitur triangulum ABC æquale eſt triangulo ADE, aliud autem eſt ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [b] triangulum ADE ad triangulum BAD. ſed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita [c] CA ad AD, ut autem triangulum EAD ad ipſum BAD, ita [c] EA ad AB. ut [d] igitur CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt. Et ſi reciproca ſunt latera triangulorum ABC ADE, ſcil. ſit ut CA ad AD, ita EA ad AB. dico triangulum ABC triangulo ADE æquale eſſe. juncta enim rurſus BD, quoniam ut CA ad AD, ita eſt EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita [c] ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita [c] triangulum EAD ad BAD triangulum, erit [d] ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea [e] æquale eſt ABC triangulum



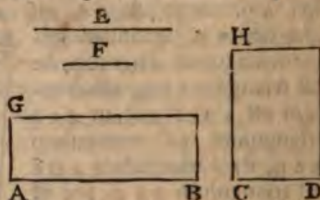
[a] 14. prim.
[b] 7. quin.
[c] 1. hujus
[d] 11. quin.
[e] 9. quin.

gulum triangulo ADE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt: & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei rectangulo quod ſub mediis continetur: Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, ſitque ut AB ad CD, ita E ad F. dico rectangulum contentum ſub rectis lineis AB F æquale eſſe ei quod ſub ipſis CD E
11. primi. continetur. ducantur enim [a] à punctis A C ipſis AB CD ad rectos angulos AG CH; ponaturque ipſi quidem F æqualis AG, ipſi vero E æqualis CH, & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita E ad F; eſt autem E æqualis
7. quinti. CH, & F ipſi AG: erit [b] ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ ſunt circum æquales angulos, reciproca ſunt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ ſunt circum æquales angulos,



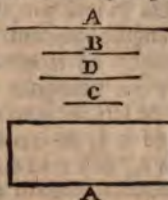
14. hujus. reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt [c] æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale eſt parallelogrammo DH. atque eſt parallelogrammum quidem BG, quod ſub rectis lineis AB F continetur, etenim AG eſt æqualis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur ſub ipſis CD E, cum CH ipſi E ſit æqualis. rectangulum igitur contentum ſub AB & F eſt æquale ei quod ſub ipſis CD & E continetur. Et ſi rectangulum contentum ſub AB F ſit æquale ei quod ſub CD & E continetur. dico quatuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F. iiſdem enim conſtructis quoniam rectangulum contentum ſub AB & F eſt æquale ei quod ſub CD & E continetur, atque eſt contentum

contentum quidem ſub A B F rectangulum B G, etenim A G eſt æqualis F; contentum vero ſub C D E eſt rectangulum D H, quòd C H ipſi E ſit æqualis. erit parallelogrammum B G æquale parallelogrammo D H; & ſunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt. [c] quare ut A B ad C D, ita C H ad A G, æqualis autem eſt C H ipſi E, & A G ipſi F. ut igitur A B ad C D, ita E ad F. Ergo ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei eſt quod ſub mediis continetur: & ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei quod à media fit quadrato: Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C; & ſit ut A ad B, ita B ad C. dico rectangulum contentum ſub A C æquale eſſe ei quod à media B fit quadrato. ponatur ipſi B æqualis D. Et quoniam ut A ab B, ita B ad C, æqualis autem B ipſi D; erit ut A ad B [a], ita D ad C. ſi autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum ſub extremis contentum eſt [b] æquale ei quod ſub mediis continetur. ego rectangulum ſub A C contentum eſt æquale ei quod continetur ſub B D. ſed rectangulum contentum ſub B D eſt æquale quadrato quod fit ex ipſa B; etenim B eſt æqualis D. rectangulum igitur contentum ſub A C eſt æquale ei quod ex B fit quadrato. Et ſi rectangulum contentum ſub A C æquale ſit quadrato quod fit ex B. dico ut A ad B, ita eſſe B ad C. iiſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum contentum ſub A C æquale eſt quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B eſt rectangulum quod ſub ipſi B D continetur, eſt enim B æqualis ipſi D; erit rectangulum contentum ſub A C æquale ei quod ſub B D continetur. ſi autem rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales





[a] 7. quinti.

[b] 16. hujus.

portionales

portionales *b* erunt. eſt igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipſi D. ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum eſt æquale ei quod à media fit quadrato. Et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

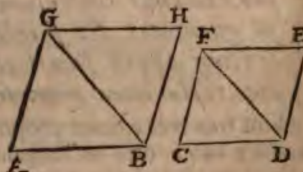
PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

Sit data recta linea A B, datum autem rectilineum C E. oportet à recta linea A B rectilineo C E ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere. Jungatur D F, & ad rectam lineam A B, & ad puncta in ipſa A B, angulo quidem C æ-

a 23. primi. qualis angulus *a* conſtituatur G A B, angulo autem C D F angulus A B G. reliquus igitur C F D angulus reliquo A G B

b 2. Cor. 32. primi. eſt *b* æqualis. ergo æquiangulum eſt F C D triangulum triangulo G A B; ac propte-



c 4. hujus. rea *c* ut F D ad G B, ita F C ad G A, & C D ad A B. rurſus conſtituatur ad rectam lineam B G, & ad puncta in ipſa B G, angulo quidem D F E æqualis angulus B G H, angulo quidem F D E æqualis G B H. ergo reliquus *b* ad E reliquo ad H eſt æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum F D E triangulo G B H. quare ut *c* F D ad G B, ita F E ad G H, & E D ad H B. oſtenſum autem eſt & ut F D

d 11. quinti. ad G B, ita F C ad G A, & C D ad A B: & ut igitur *d* F C ad A G, ita C D ad A B, & F E ad G H, & adhuc E D ad H B. itaque quoniam angulus quidem C F D eſt æqualis aagulo A G B; angulus autem D F E angulo B G H. erit totus C F E angulus toti A G H æqualis. eadem ratione & C D E eſt æqualis ipſi A B H, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur eſt A H ipſi C E, & latera circum æquales ipſis angulos habet proportionalia. ergo rectilineum A H rectilineo C E ſi-

e 1. Def. hujus. mile *e* erit: A data igitur recta linea A B dato rectilineo C E ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum A H deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsis [a] BC EF tertia proportionalis BG, ut sit BC ad EF ita EF ad BG. & jungatur GA. quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut [b] igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia [c] sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [d] habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG [e]. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC [f] ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.

[a] 11. hujus.
[b] 11. quinti.
[c] 15. hujus.
[d] Def. 10. quinti.
[e] 1. hujus.
[f] 7. quinti.

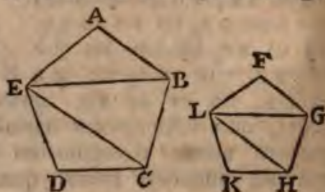
Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod sit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint ſimilia polygona ABCDE FGHKL, & ſit AB homologum ipſi FG. dico polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG. jungantur BE EC GL LH. Et quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt [a] æqualis, atque eſt ut BA ad AE, ita GF ad FL. quoniam igitur duo triangula ſunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia. erit [b] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo [c] & ſimile. angulus igitur ABE æqualis eſt angulo FGL. eſt autem & totus ABC angulus æqualis [a] toti FGH, propter ſimilitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt æqualis. & quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE FGL, eſt [a] ut EB ad BA, ita LG ad GF. ſed & propter ſimilitudinem polygonorum [a], ut AB ad BC, ita eſt FG ad GH; erit ex æquali ut [d] EB ad BC, ita LG ad GH. hoc eſt circum æquales angulos EBC LGH latera ſunt proportionalia; æquiangulum igitur [b] eſt EBC triangulum triangulo LGH. quare & [c] ſimile. eadem ratione & ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. ſimilia igitur polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia. dico & homologa totis: hoc eſt ut proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidem ſunt ABE EBC ECD, conſequentia autem ipſorum FGL LGH LHK; & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem [e] ejus quam habet BE ad GL. eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [d] proportionem habet ejus quam BE ad GL. eſt [f] igitur ut ABE trian-



a 1. Def. hujus.

b 6. hujus.

c 4. hujus.

d 22. quinti.

e 19. hujus.

f 11. quinti.

triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rurſus quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem *e* ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CE ad HL. eſt *f* igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, & triangulum ECD ad ipſum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum conſequentium *g*, ſic omnia antecendentia ad omnia conſequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL: ſed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG, ſimilia enim triangula in duplicata *h* ſunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod oportebat demonſtrare.

g 12. quinti.
h 19. hujus.

Eodem modo & in ſimilibus quadrilateris oſtendetur ea eſſe in duplicata proportione laterum homologorum. oſtenſum autem eſt & triangulis.

COROLL.

1. Ergo univerſe ſimiles figuræ rectilineæ inter ſe ſunt in duplicata proportione homologorum laterum. & ſi ipſis AB FG tertiam proportionalem ſumamus, quæ ſit X; habebit AB ad X duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis.



2. Univerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ propor-

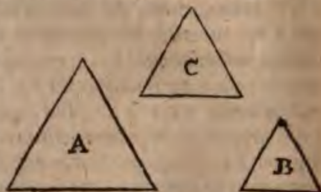
proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum *a* erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit *a*. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea *a* A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

a 1. Def. hujus.



PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, & ut AB ad CD, ita sit EF ad GH. describanturque *a* ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis vero EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum. Sumatur ipsis *b* quidem AB CD tertia proportionalis X; ipsis vero EF GH tertia proportionalis O. & quoniam est ut AB ad CD, ita EF ad GH: ut autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali *c* ut AB ad X, ita EF ad O. sed ut AB quidem ad X, ita est *d* rectilineum KAB ad LCD rectilineum,

a 18. hujus.
b 11. hujus.
c 22. quinti.
d 2. Cor. 20. hujus.

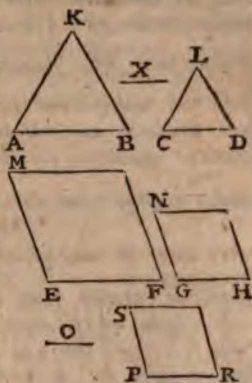
lineum, ut autem EF ad O, ita [d] rectilineum MF ad rectilineum NH. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est [e] rectilineum MF ad NH rectilineum. Et si sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad [f] PR, & describatur [a] ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile, & similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR, erit [g] ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. quod cum rectilineum MF ad utrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit [h] rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. ergo GH est æqualis PR. & quoniam ut AB ad CD, ita est EF ad PR: æqualis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

e 11. quinti.

f 12. hujus.

g ex prius demonstratis.

h 9. quinti.



LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A, B *&* C; *ratio primæ* A *ad tertiam* C, *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, *& ratione secundæ* B *ad tertiam* C.

Sit V. G. *numerus ternarius exponens seu denominator rationis* A *ad* B, *hoc est sit* A *triplo ipsius* B, *& sit numerus quaternarius exponens rationis* B *ad* C, *erit numerus duodenarius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione* *compo-*

compositus exponens rationis A *ad* C; *nam quia* A *continet* B *ter, &* B *continet* C *quater, continebit* A *ipsum* C *ter quater, seu duodecies. idem de aliis multiplicibus vel submultiplicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demonstratio talis est, Quantitas rationis* A *ad* B *est numerus* $\frac{A}{B}$, *scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et similiter quantitas rationis* B *ad* C *est* $\frac{B}{C}$. *Atque hæ duæ quantitates inter se multiplicatæ efficiunt numerum* $\frac{A \times B}{B \times C}$ *qui est quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis* A *&* B *habet ad rectangulum sub* B *&* C *rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub* A *&* B, *ad rectangulum sub* B *&* C *ea est quæ in sensu def.* 5. *hujus, componitur ex rationibus* A *ad* B *&* B *ad* C. *sed per* 1. 6. *rectangulum sub* A *&* B, *est ad rectangulum sub* B *&* C, *ut* A *ad* C. *& igitur ratio* A *ad* C *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, *&* B *ad* C.

A
B
C

Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, *&* D; *Ratio primæ* A *ad quartam* D *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, *& ratione secundæ* B *ad tertiam* C, *& ratione tertiæ* C *ad quartam* D.

Nam in tribus rectis A, C, *&* D, *ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* C, *&* C *ad* D. *Et hactenus est ostensum rationem* A *ad* C *æqualem esse rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B *&* B *ad* C. *Et igitur ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C *&* C *ad* D. *Similiter ostendetur, in quotcunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.*

A
B
C
D

Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C *&c. ordine positæ quot sunt magnitudines, & in eadem ratione: ita* viz. *ut recta* A *sit ad rectam* B *ut prima magnitudo ad secundam, & recta* B *ad rectam* C *ut secunda magnitudo ad tertiam, & ita porro. Manifestum est per* 22. 5. *esse ex æquo rectam* A *ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ* A *ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C, *&* ita

ita porro usque ad ultimam rectam. Et, ex hypothesi, ratio cujuslibet rectæ ad sibi proximam, eadem est cum ratione magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur ratio primæ magnitudinis ad ultimam æqualis est rationi compositæ ex rationibus primæ magnitudinis ad secundam, secundæ ad tertiam, & ita deinceps usque ad ultimam. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione quam habet BC ad CG, & ex proportione quam DC habet ad CE. ponatur enim ut BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum [a] erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat ut BC ad CG, ita [b] K ad L, ut autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L, & L ad M eædem sunt quæ proportiones laterum videlicet BC ad CG, & DC ad CE. sed proportio K ad M composita est [c] ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. & quoniam est ut BC ad CG [d], ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed ut BC ad CG, ita K ad L: erit [e] ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rursus quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M. ergo ut L ad M, ita erit [e] parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit [f] ex æquali ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma



a 14. primi
b 12. hujus
c. per Lemma superius.
d 1. hujus
e 11. quinti
f 22. quinti

compositus exponens rationis A *ad* C; *n*
ter, & B continet C quater, contineb
ter, seu duodecies. idem de aliis multi
plicibus verum est. Universalis vero huju

stratio talis est, Quantitas rationis A

sit, qui multiplicans consequen-
tem producit antecedentem. Et A——
similiter quantitas rationis B *ad* B——
C *est* $\frac{B}{C}$. *Atque hæ duæ quanti-* C—

tates inter se multiplicatæ efficiunt nov

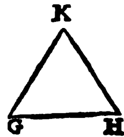
quantitas rationis quam rectangulum com
A *&* B *habet ad rectangulum sub* B *&* C *re*
ratio rectanguli sub A *&* B, *ad rectangul*
quæ in fine def. 5. *hujus, componitur e*
& B *ad* C. *Sed per* 1. 6. *rectangulum sub*
angulum sub B *&* C, *ut* A *ad* C. *& igitur*
lis est rationi compositæ ex rationibus A *ad*
Positis vero quatuor rectis quibuscunque
tio primæ A *ad quartam* D *æqualis est*
rationum primæ A *ad secundam* B, *& ratio*
tiam C, *& rationis tertiæ* C *ad quartam* D

Nam in tribus rectis A, C, *&* D,
ratio A *ad* D *æqualis est rationi* A——
compositæ ex rationibus A *ad* C, B——
& C *ad* D. *Et habemus est o-* C——
stensam rationem A *ad* C *æqualem*
esse rationi compositæ ex ratio- D——
nibus A *ad* B *&* B *ad* C. *Et igi-*
tur ratio A *ad* D *æqualis est rationi compo*
A *ad* B, B *ad* C *&* C *ad* D. *Similiter ostend*
que rectis, rationem primæ ad ultimam æ
compositæ ex rationibus primæ ad secund
tiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps
Si exponantur aliæ magnitudines
idem obtinebit. Quod constabit si
C *&c. ordine posita sint magnitudines*
rationes: ita ut recta A sit ad rectam
gnitudo ad secundam, & recta
magnitudo ad tertiam, &
5. *erit ex æquo*
gnitudo ad ultimam
æqualis est

ınt ſimilia.

uale idem

ıile conſti-
pſi A B C ſi-
icetur *a* ad *a* 44.primi.
uale paral-
a parallelo-



b 14.primi.

c 13. hujus.
d 18. hujus.

quoniam eſt
linea pro-
t figura quæ *e* 2.Cor.20.
ſimiliter de- hujus.
ım ad recti-
elogrammum *f* 1. hujus.
ineum A B C *g* 11.quinti.
n ad paralle-
rectilineum *h* 16.quinti.
H ad E F pa-
C æquale pa-
H rectilineum
um æquale eſt
eſt æquale: eſt
gitur rectilineo
conſtitutum eſt

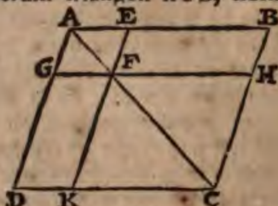
PROP.

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se similia sunt.

Sit parallelogramma ABCD, cujus diameter AC: circa
diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK. dico
parallelogramma EG HK & toti ABCD, & inter se similia
esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet
ipsi BC parallela ducta est EF, erit [a] ut BE ad EA, ita CF
ad FA. quoniam rursus uni laterum trianguli ACD, nempe
ipsi CD ducta est parallela
a 2. hujus. FG, ut CF ad FA, ita [a] erit
DG ad GA. sed ut CF ad
FA ita ostensa est & BE
ad EA. ergo & ut BE ad
b 11. quinti. EA, ita [b] DG ad GA, com-
c 18. quinti. ponendoque [c] ut BA ad AE,
ita DA ad AG. & permu-



tando ut BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum
igitur ABCD EG latera, quæ circa communem angulum
BAD, proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi
d 29. primi. DC, angulus quidem AGF est [d] æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est
communis duobus triangulis ADC AGF; erit igitur triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æ-
e 4. hujus. quiangulum. ergo ut AD ad DC, ita [e] AG ad GF, ut autem
DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE,
& præterea ut CB ad BA, ita FE ad EA. itaque quoniam
ostensum est ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem
f 22. quinti. AC ad CB, ita AF ad FE; erit [f] ex æquali ut DC ad CB, ita
GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propte-
g 1. Def. hujus. rea [g] parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile
est parallelogrammo KC. utrumque igitur ipsorum EG HK
parallelogrammorum, parallelogrammo ABCD est simile.
quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia
h 21. hujus. [h] sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diame-

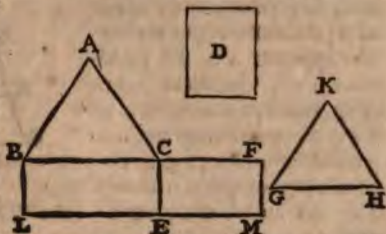
trum

trum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo, simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur [a] ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale parallelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur [a] parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur [b] est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. sumantur [c] inter BC CF media proportionalis GH, & [d] ab ipsa GH describatur rectilineum KGH simile & similiter positum rectilineo ABC. Et quoniam est ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam [e], ita est figura quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit ut BC ad CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. sed & ut BC ad CF, ita [f] parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum, ut [g] igitur rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare [h] permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum. est autem rectilineum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH rectilineum parallelogrammo EF. sed EF parallelogrammum æquale est rectilineo D. ergo & rectilineum KGH ipsi D est æquale: est autem GKH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato D æquale idem constitutum est KGH. Quod facere oportebat.



a 44. primi.
b 14. primi.
c 13. hujus.
d 18. hujus.
e 2. Cor. 20. hujus.
f 1. hujus.
g 11. quinti.
h 16. quinti.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim A B C D parallelogrammum A F auferatur, simile ipsi A B C D, & similiter positum communemque ipsi angulum habens D A B. dico parallelogrammum A B C D circa eandem esse diametrum parallelogrammo A F. Non enim, sed si fieri potest, sit parallelogrammi B D diameter A H C, & producatur G F usque ad H; ducaturque per H alterutri ipsarum A D B C parallela H K. Quoniam igitur circa eandem diametrum est A B C D parallelogrammum



a 24. hujus. parallelogrammo K G; & erit [a] parallelogrammum A B C D

b 1. Def. hujus. parallelogrammo K G simile. ergo ut [b] D A ad A B, ita G A ad A K. est autem & propter similitudinem parallelogrammorum

c 11. quinti. A B C D E G, ut D A ad A B, ita G A ad A E. & [c] igitur ut G A ad A E, ita G A ad A K. quòd cum G A ad utramque

d 9. quinti. ipsarum A K A E eandem proportionem habeat; erit [d] A E ipsi A K æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur circa eandem diametrum est A B C D parallelogrammum parallelogrammo A H. quare circa eandem diametrum erit ipsi A F. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidio describitur; maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea A B; seceturque bifariam in C; & ad A B rectam lineam applicetur parallelogrammum A D deficiens figura parallelogramma C E, simili & similiter posita ei quæ à dimidia ipsius A B descripta est. dico omnium

paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi C E, maximum esse A D. Applicetur enim ad rectam lineam A B parallelogrammum A F, deficiens figura parallelogramma H K simili, & similiter posita ipsi C E. dico A D parallelogrammum parallelogrammo A F majus esse.



Quoniam enim simile est parallelogrammum C E parallelogrammo H K, circa eandem diametrum [a] sunt. ducatur eorum diameter D B, & describatur figura. quoniam igitur C F [b] est æquale ipsi F E, commune apponatur H K. totum igitur C H toti K E est æquale. sed C H est [c] æquale C G, quoniam & recta linea A C ipsi C B. ergo & G C ipsi E K æquale est. commune apponatur C F. totum igitur A F est æquale gnomoni L M N: quare & C E, hoc est A D parallelogrammum parallelogrammo A F est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidium est applicatum. Quod demonstrare obortebat.

[a] 26. hujus
[b] 43. primi
[c] 36. primi

PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam A B applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur A B bifariam in E, & ab ipsa E B describatur [a] simile, & similiter positum ipsi D; quod sit E B F G, & compleatur A G parallelogrammum. itaque A G vel æquale est ipsi C, vel eo majus, ob

[a] 18. hujus

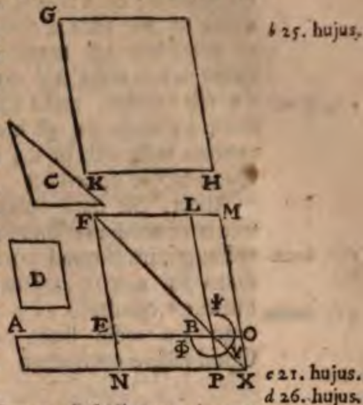
ob determinationem: & ſi quidem AG ſit æquale C, factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma EF ipſi D ſimili. ſi autem non eſt æquale, erit HE majus quàm C; atque EF æquale eſt HE. ergo, & EF quàm C eſt majus. quo autem EF ſuperat C, ei exceſſui æquale, ipſi vero D ſimile & ſimiliter poſitum,
a 25. hujus. idem a conſtituatur KLMN. ſed D eſt ſimile EF. quare & KM ipſi EF ſimile erit. ſit igitur recta linea KL homologa ipſi GE, LM vero ipſi GF. & quoniam æquale eſt EF ipſis C & KM, erit EF ipſo KM ma-
b Cor. 20. hujus. jus. major b igitur eſt recta linea GE ipſa KL & GF ipſa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrammum. æquale igitur eſt & ſimile XO ipſi KM.
c 21. hujus. ſed KM ſimile eſt EF. ergo & c XO ipſi EF eſt ſimile. circa
d 26. hujus. eandem igitur eſt d diametrum XO ipſi EF. ſit ipſorum diameter GPB, & figura deſcribatur. itaque quoniam EF eſt æquale ipſis C & KM ſimul, quorum XO eſt æquale KM, erit reliquus ΥΦΨ gnomon æqualis reliquo C. & quoniam OR
e 43. primi. eſt e æquale XS, commune apponatur SR. totum igitur OB
f 36. primi. toti XB eſt æquale. ſed XB eſt f æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipſi OB æquale. commune apponatur XS. ergo totum TS eſt æquale toti gnomoni ΥΦΨ. at ΥΦΨ gnomon ipſi C oſtenſus eſt æqualis: & TS igitur ipſi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum TS applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma SR ipſi D ſimili, quoniam & SR ſimile eſt ipſi GB. Quod facere oportebat.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipſam AB applicare, ſit C; cui autem oportet ſimile excedere D. oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

gura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter [a] positum parallelogrammum describatur EL. & utriusque quidem EL & C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem [b] constituatur GH. simile igitur est GH ipsi EL. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. & quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE. producantur FL FE, & ipsi quidem KH æqualis sit FLM, ipsi vero KG æqualis FEN, & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. sed GH est simile EL: MN igitur ipsi EL simile [c] erit; ac propterea circa eandem diametrum [d] est EL ipsi MN. ducatur ipsorum diameter EX, & figura describatur. itaque quoniam GH ipsi EL & C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsi EL & C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΦΥΨ gnomon ipsi C est æqualis. & quoniam AE est æqualis EB, æquale [e] erit & AN parallelogrammum parallelogrammo EP, hoc est ipsi [f] LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦΥΨ. sed ΦΥΨ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam & ipsi EL simile [g] est OP. Quod fecisse oportebat.



[a] 18. hujus.
[b] 25. hujus.
[c] 21. hujus.
[d] 26. hujus.
[e] 36 primi.
[f] 43. primi.
[g] 24. hujus.

PROP. XXX. PROBL.

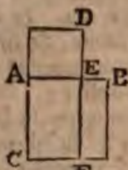
Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

Sit data recta linea terminata AB oportet ipsum AB extrema ac media ratione secare. Describatur [a] ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum [b] applicetur CD, excedens [b] figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC, ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi æquiangulum. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales

[a] 46. primi.
[b] 29. hujus.

 angulos

c 14. hujus. angulos, reciproce sunt c proportionalia. ut igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est
d 34. primi. autem FE æqualis d AC, hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE. ergo AE quam
e 14. quinti. EB est e major. recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est AE. Quod facere oportebat.

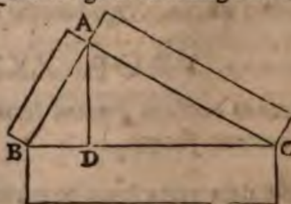


Aliter. Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita ut
f 11. secundi. rectangulum f quod continetur sub AB BC æquale sit quadrato ex AC. quoniam igitur rectangulum sub AB BC æ-
g 17. hujus. quale est quadrato ex AC, erit g ut BA ad AC ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. Quod facere oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. dico figuram, quæ fit ex BC æqualem esse eis quæ ex BA AC fiunt similibus, & similiter descriptis. ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ACB ab angulo recto, qui est ad A, ad BC basim perpendicularis ducta
a 8. hujus. est AD, erunt a triangula ABD ADC quæ sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se. & quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut a CB ad BA, ita BA ad BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima
b 2. Cor. 20. hujus. ad tertiam, ita erit b figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam quæ ex BA, similem & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura quæ fit ex BC ad eam quæ ex CA. quare & ut BC ad ipsas,



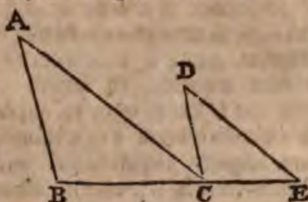
ipsas BD DC, ita c figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem est BC ipsis BD DC. ergo figura quæ fit ex BC æqualis est eis quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. in rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. Quod ostendere oportebat. c 24. quinti

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, scil. sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC & AC ipsi DE. dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erunt a anguli alterni BAC ACD æquales inter se. eadem ratione, & angulus CDE æqualis est angulo ACD. quare & BAC ipsi CDE est æqualis. & quoniam duo triangula sunt ABC DCE, unum angulum ad A, uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit b triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis c sunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C, duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum d erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant

a 29. primi



b 6. hujus.

c 32. primi.

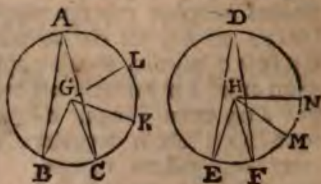
d 14. primi.

beant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſunt parallelæ; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus inſiſtant, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc autem & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

Sint æquales circuli ABC DEF; & ad centra quidem ipſorum G H ſint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe & BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem. ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcunque deinceps CK KL; circumferentiæ vero EF, rurſus æquales quotcunque FM MN. & jungantur GK GL, HM HN. Quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter ſe ſunt æquales, & anguli



27. tertii. BGC CGK KGL inter ſe æquales [a] erunt. quotuplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex eſt & BGL angulus anguli BGC. eadem ratione & quotuplex eſt circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex & EHN angulus anguli EHF. ſi vero æqualis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN; & angulus BGL angulo EHN erit æqualis; & ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN, major erit & BGL angulus angulo EHN; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF, & duobus angulis BGC EHF; ſumptæ ſunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli, æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiæ vero EB, & EHF anguli, æque multiplicia, nempe circumferentia EN, & angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, & BGL angulum ſuperare angulum EHN; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem eſſe. ut [b] igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. ſed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita

Def. 5. quinti.

angulus

e angulus BAC ad EDF angulum, uterque enim utriusque est [d] duplex. & ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quàm circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. Jungantur enim BC CK, & sumptis in circumferentiis BC CK punctis XO, jungantur & BX XC CO OK. itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis. æquale [e] igitur est GBC triangulum triangulo GCK. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est [f] æqualis. simile igitur est BXC segmentum [g] segmento COK: & sunt in æqualibus rectis lineis BG GK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta, & inter se [h] æqualia sunt. ergo segmentum BXC est æquale segmento COK. est autem & BGC triangulum triangulo CGK æquale. & totus igitur sector BGC sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione & GKL sector utrique ipsorum GBC GCK est æqualis. tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. similiter & sectores HEF HFM DMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est & GBL sector sectoris GBC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex est & HEN sector sectoris HEF. Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN; & si circumferentia BD superat circumferentiam EN, superat & BGL sector sectorem EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector. circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF, æque multiplicia, circumferentia EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem.



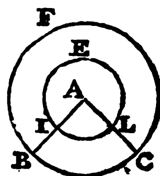
c 15. quinti.
d 20. tertii.
e 4. primi.
f 27. tertii.
g 11. Def. tertii.
h 24. tertii.

minorem. est [b] igitur ut B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita sector G B C ad H E F sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insistit ad totam circumferentiam: nam ut angulus B A C ad rectum, ita B C arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus B A C ad quatuor rectos, ut arcus B C ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus I L B C qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est I L ad totam peripheriam I L E, ut angulus I A L ad quatuor rectos: est vero ut I A L seu B A C ad quatuor rectos, ita arcus B C ad totam peripheriam B C F. quare ut I L ad totam peripheriam I L E, ita B C ad totam peripheriam B C F. ac proinde arcus I L B C sunt similes.



3. Duæ semidiametri A B A C à concentricis peripheriis arcus auferunt similes I L B C.

EUCLIDIS.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SOlidum eſt, quod longitudinem, latitudinem & craſſitudinem habet.

II.

Solidi terminus eſt ſuperficies.

III.

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, & in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum eſt, cum rectæ lineæ quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adjuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adjuncta comprehenſus.

VI.

Plani ad planum inclinatio eſt, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

IX.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X.

Æquales & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus eſt, plurium quàm duarum linearum quæ ſe mutuo contingunt, nec in eadem ſunt ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel ſolidus angulus eſt, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis continetur.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

XIII.

Priſma eſt figura ſolida quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela; al[...] vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, c[...] cumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus revolvitur u[...] moveri cœperat, circum aſſumpta figura.

XV.

Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

XVI.

Centum ſphæræ eſt idem quod & ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat, circum aſſumpta figura. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: ſi vero minor, amblygonius: ſi vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem coni eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Baſis vero coni eſt circulus qui à circumducta recta linea deſcribitur.

XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri, circum aſſumpta figura.

XXII.

Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

XXIV.

Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

XXV.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

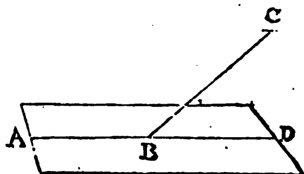
XXX.

Parallelippipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso parallelæ sunt, contenta.

PROPOSITIO. I. THEOREMA.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ A B pars quidem A B sit in subjecto plano, pars vero B C in sublimi. erit recta linea quædam ipsi A B in directum continuata in subjecto plano. sitque D B. duabus igitur datis rectis lineis A B C A B D commune segmentum est A B, quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quàm uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. Quod demonstrare oportebat.



PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem in puncto E secent. dico ipsas AB CD in uno esse plano, & omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB EC quævis puncta FG; junganturque CB FG, & FH GK ducantur. dico primum EBC triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli EBC pars quædam FHC, vel GBK in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum EB EC pars in subjecto plano, & pars in alio. quòd si trianguli ECB pars FCBG sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum EC EB quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse [a] ostendimus. triangulum igitur EBC in uno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est utraque ipsarum EC EB: in quo autem utraque ipsorum EC EB, in hoc [a] sunt & AB CD. Ergo rectæ lineæ AB CD in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum.

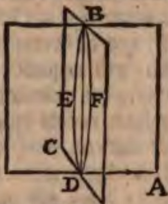


[a] 1. hujus.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana AB BC se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. dico lineam DB rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt utique duarum rectarum linearum DEB DFB iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod est absurdum [a]. non igitur DEB DFB rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ab B ducitur rectam esse, præter ipsam DB communem scilicet planorum AB BC sectionem. Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. Quod ostendere oportebat.

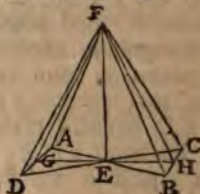


[a] Axio. 10 primi.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ EA EB CE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque: & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



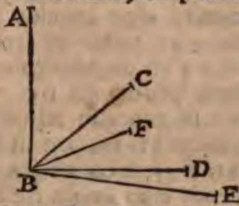
15.primi. angulos [a] æquales AED CEB continent, erit [b] AD basis basi
4. primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem & angulus AEG [a] æqualis angulo BEH. duo igitur triangula sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera
26.primi. reliquis lateribus æqualia habebunt [c]. ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit [b] basis AE basi EB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
8. primi. teri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus [d] igitur FAD angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AC æqualis BH, sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH; ut demonstratum fuit, basis igitur GF basi FH est [b] æqualis. rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus [d] igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
3. Def. hujus. planum recta est [e] quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

tingentes, & eodem exiſtentes plano rectos efficit angulos. quare FE ſubjecto plano ad rectos angulos inſiſtit. at ſubjectum planum eſt quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis ſe invicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus, in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos inſiſtat. dico BC BD BE in uno plano eſſe. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint BD BE quidem in ſubjecto plano; BC vero in ſublimi, & planum per AB BC producatur. communem utique ſectionem in ſubjecto plano faciet [a] rectam lineam; faciat BF. in uno igitur ſunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipſarum BD BE ad rectos angulos inſiſtit, & ducto per ipſas DB BE plano [b] ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE eſt ſubjectum planum. ergo AB ad ſubjectum planum recta eſt. quare & ad [c] omnes rectas lineas ipſam contingentes, quæ in eodem plano ſunt, rectos faciet angulos; ſed ipſam tangit BF in ſubjecto exiſtens plano. ergo angulus ABF rectus eſt. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur eſt angulus ABF angulo ABC, & in eodem ſunt plano; quod fieri non poteſt. recta igitur linea BC non eſt in ſublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno ſunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus, in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonſtrare oportebat.



[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

[c] 3. Def. hujus.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter ſeſe parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD ſubjecto plano ſint ad rectos angulos. dico AB ipſi CD parallelam eſſe. occurrant

enim subjecto plano in punctis B D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB æquali, jungantur BE AE AD. Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos [a] efficiet. contingit autem AB utraque ipsarum BD BE existens in subjecto plano. ergo uterque angulorum ABD ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB CDE. & quoniam AB æqualis est ipsi DE, communis autem BD. erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est [b] æqualis.

[a] 3. Def. hujus.
[b] 4. primi.



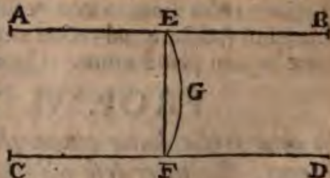
rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duæ AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est [c] æqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD DA DC in uno sunt [d] plano. in quo autem sunt BD DA, in eo est AB, omne enim triangulum in uno [e] est plano. ergo AB BD DC in uno plano sint necesse est; atque est uterque angulorum ABD BDC rectus. parallelæ igitur [f] est AB ipsi CD. quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. Q. E. D.

[c] 8. primi.
[d] 5. hujus.
[e] 2. hujus.
[f] 28. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta EF. dico rectam lineam quæ puncta E F conjungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF, & per EGF, planum ducatur quod in subjecto plano sectionem faciet [a] rectam lineam; faciat ut



[a] 3. hujus.

ut EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF ſpatium continebunt, quod fieri non [b] poteſt. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in ſublimi eſt plano, quare erit in eo quod per AB CD parallelas tranſit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, &c. Quod oportebat demonſtrare. b 10. axio. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, altera autem ipſarum plano alicui ſit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

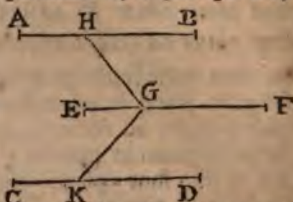
Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipſarum AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos eſſe. occurrant enim AB CD ſubjecto plano in punctis B D, & BD jungatur. ergo AB CD BD in uno ſunt [a] plano. ducatur ipſi BD ad rectos angulos in ſubjecto plano DE: & ponatur DE ipſi AB æqualis: junganturque BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis eſt ad ſubjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt ſuntque in ſubjecto plano, perpendicularis [b] erit. rectus igitur eſt uterque angulorum ABD ABE. quod cum in parallelas rectas lineas AB CD recta incidit BD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis [c] æquales. rectus autem eſt ABD. ergo & CDB eſt rectus; ac propterea CD perdendicularis eſt ad BD. & quoniam AB eſt æqualis DE, communis autem ED, duæ AB BD duabus ED DB æquales ſunt; & angulus ABD eſt æqualis angulo EDB, rectus enim uterque eſt, baſis igitur AD baſi BE eſt [d] æqualis. rurſus quoniam AB æqualis eſt DE, & BE ipſi AD; erunt duæ AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & baſis earum communis AE. quare angulus ABE eſt [e] æqualis angulo EDA. rectus autem eſt ABE. ergo & EDA eſt rectus, & ED ad DA perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad BD. ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis [f] erit, & ad omnes rectas lineas quæ in eodem exiſtentes plano ipſam contingunt, rectos [g] faciet angulos. at in plano per BD DA eſt DC, quoniam in plano per BD DA ſunt [h] AB BD: in quo autem ſunt AB BD in eodem [i] eſt ipſa DC. quare ED ipſi DC eſt ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos angulos eſt ipſi DE; ſed & etiam ipſi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per DE DB eſt [e] ad rectos angulos. planum autem per DE DB eſt ſubjectum planum. ergo CD ſubjecto plano ad rectos angulos erit. Quod demonſtrare oportebat.

Vide figuram Prop. ſextæ.
a 7. hujus.
b 3. Def. hujus.
c 29. primi.
d 4. primi.
e 8. primi.
f 4. hujus.
g 3. Def. hujus.
h 2. hujus.
i 7. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum A B C D parallela ipsi E F, non existentes in eodem, in quo ipsa plano. dico A B ipsi C D parallelam esse. sumatur in E F quodvis punctum G, à quo ipsi E F, in plano quidem per E F A B transeunte, ad rectos angulos ducatur G H; in plano autem transeunti per E F C D, rursus ducatur ipsi E F ad rectos angulos G K. & quoniam E F ad utramque ipsarum G H G K est perpendi-

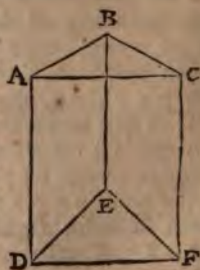


4. hujus. cularis, erit E F etiam ad rectos [a] angulos plano per G H G K transeunte. atque est E F ipsi A B parallela. ergo & A B pla-
8. hujus. no per H G K ad rectos angulos [b] est. eadem ratione & C D plano per H G K est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum A B C D plano per H G K ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fue-
6. hujus. rint, parallelæ [c] erunt inter se. ergo A B ipsi C D est parallela. Quod demonstrare oportebat.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes A B B C, duabus rectis lineis D E E F sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. dico angulum A B C angulo D E F æqualem esse. assumantur enim B A B C E D E F inter se æquales: & jungantur A D C F B E A C D F. quoniam igitur B A ipsi
a 33. primi. E D æqualis est & parallela, erit & [a] A D æqualis & parallela ipsi B E. eadem ratione & C F ipsi B E æqualis & parallela erit. utraque igitur ipsarum A D C F ipsi B E æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & in-



ter

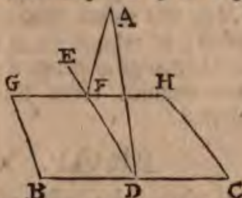
ter se parallelæ [b] erunt. ergo A D parallela est ipsi C F & æqualis. atque ipsas conjungunt A C D F; & A C igitur ipsi D F æqualis est & [c] parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ A B B C duabus D E E F æquales sunt, & basis A C est æqualis basi D F; erit [d] angulus A B C angulo D E F æqualis. Si igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

[b] 9. huj.
[c] 33. pri
[d] 8. pri

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum B H. oportet à puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque B C, & à puncto A ad B C perpendicularis agatur [a] A D. siquidem igitur A D perpendicularis sit etiam ad subjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: sin minus; ducatur à puncto D ipsi B C, in subjecto plano, ad rectos [b] angulos D E: & à puncto A ad D E perpendicularis [a] ducatur A F. denique per F ducatur G H ipsi B C [c] parallela. Quoniam B C utrique ipsarum D A D E est ad rectos angulos, erit [d] & B D ad rectos angulos plano per D A D E transeunti. quin ipsi B C parallela est G H; si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua [e] eidem plano ad rectos angulos erit. quare & G H plano per E D D A transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt est [f] perpendicularis. contingit autem ipsam A F existens in plano per E D D A. ergo G H perpendicularis est ad A F. & ob id A F est perpendicularis ad G H: est autem A F ad D F perpendicularis. ergo A F perpendicularis est ad utrumque ipsarum H G D E. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos [d] erit. quare A F plano per E D G H ducto est ad rectos angulos. planum autem per E D G H est subjectum planum. ergo A F ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad sub-



[a] 12. pri
[b] 11. pri
[c] 31. pri
[d] 4. huj.
[e] 8. huj.
[f] 3. Def. hujus.

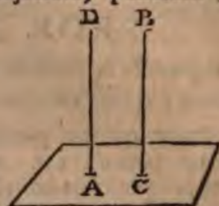
ſubjectum planum, perpendicularis recta linea ducta eſt A F. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipſo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

Sit datum quidem planum ſubjectum, punctum autem quod in ipſo ſit A. oportet à puncto A ſubjecto plano ad rectos angulos rectam lineam conſtituere. Intelligatur aliquod punctum ſublime B, à quo ad ſubjectum planum agatur *a* perpendicularis B C; & per A ipſi B C parallela *b* ducatur A D. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſunt A D C B, una autem ipſarum B C ſubjecto plano eſt ad rectos angulos; & reliqua *c* A D ſubjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipſo eſt datum, ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. Quod facere oportebat.

a 11. hujus.
b 31. primi.
c 8. hujus.



PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non conſtituentur ex eadem parte.

Si enim fieri poteſt, dato plano, à puncto quod in ipſo eſt A, duæ rectæ lineæ A B A C ad rectos angulos conſtituantur ex eadem parte: & ducatur planum per B A A C, quod faciet ſectionem per A in ſubjecto plano *a* rectam lineam. faciat D A E. ergo rectæ lineæ A B A C D A E in uno ſunt plano. & quoniam C A ſubjecto plano ad rectos angulos eſt, & ad *b* omnes rectas lineas, quæ in ſubjecto plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam D A E, quæ eſt in ſubjecto plano. angulus igitur C A E rectus eſt. eadem ratione & rectus eſt B A E. ergo angulus C A E ipſi B A E eſt æqualis. & in uno ſunt plano, quod fieri non *c* poteſt. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonſtrare.

a 3. hujus.
b 3. Def. hujus.
c 9. axiom. primi.



PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

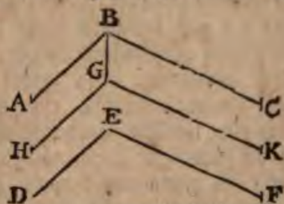
Recta quædam linea A B ad utrumque ipsorum planorum C D E F sit perpendicularis. dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: conveniant, & communem sectionem faciant rectam lineam G H; & in ipsa G H sumpto quovis puncto K, jungatur A K B K. Quoniam igitur A B perpendicularis est ad E F planum; erit & perpendicularis ad ipsam B K rectam lineam in plano E F producto existententem. quare angulus A B K rectus est. eadem ratione & B A K est rectus: ideoque trianguli A B K duo anguli A B K B A K duobus rectis sunt æquales, quod fieri non [a] potest. non igitur plana C D E F [a] 17.prim. producta inter se convenient. quare C D E F parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes A B B C, duabus rectis lineis sese tangentibus D E E F parallelæ sint, & non in eodem plano. dico plana quæ per A B B C, D E E F transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per D E E F transit, perpendicularis B G, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem E D parallela G H; ipsi vero E F parallela G K. itaque quoniam B G perpendicularis est ad planum per D E E F; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet [a] angulos. [a] 3. Def. hujus. contingit autem ipsam utraque earum G H G K, quæ sunt in eodem

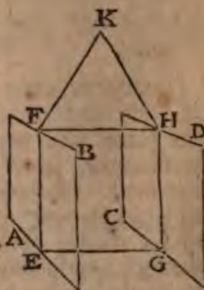


eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH BGK. & quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA
29. primi. BGH duobus rectis sunt b æquales. rectus autem est BGH. ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendicularis. eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit BG etiam
4. hujus. ad planum per BA BC ductum c perpendicularis. atque est ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per AB BC, DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est per-
d 14. hujus. pendicularis, ea parallela d sunt. parallelum igitur est planum per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH secentur; communes autem ipsorum sectiones sint EF GH. dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ EF GH inter se convenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius ad partes FH, & conveniant in K. quoniam igitur EFK est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in EFK, est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB. eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neque ad partes EG convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt parallelæ sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. Quod demonstrare oportebat.

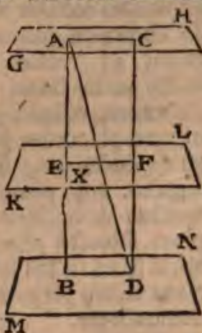


PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ rectæ lineæ AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A, E, B, C, F, D. dico ut AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Jungantur enim AC BD AD: & occurrat AD plano KL in puncto X: & EX XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelæ [a] sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AXFC secantur, communes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelæ. & quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, ut AE ad EB ita [b] erit AX ad XD. rursus quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit ut AX ad XD [b], ita CF ad FD. ostensum autem est ut AX ad XD, ita esse AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita est [c] CF ad FD. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. Quod demonstrare oportebat.



[a] 16. hujus
[b] 2. sexti.
[c] 11. quinti

PROP. XVIII. THEOR.

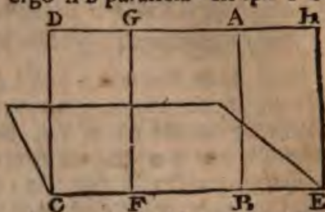
Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & omnia plana quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per AB planum DE, sitque plani DE, & subjecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quodvis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG. quoniam igitur AB ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis [a] erit. quare etiam



[a] 3. Def. hujus.

etiam ad C E est perpendicularis. angulus igitur A B F rectus
b 28. primi. est: sed & G F B est rectus. ergo A B parallela b est ipsi F G. est autem A B subjecto plano ad rectos angulos. & F G igitur eidem plano ad rectos
c 8. hujus. angulos c erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno

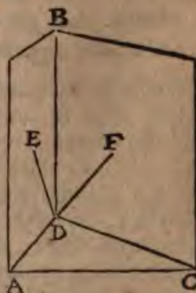


d 4. Def. hujus. planorum, reliquo plano ad rectos angulos d sunt: communi vero planorum sectioni C E in uno plano D E ad rectos angulos ducta F G, ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum D F rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per A B transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia A B B C subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit B D. dico B D subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit B D ad rectos angulos subjecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem A B, rectæ lineæ A D ad rectos angulos ipsi D E: in plano autem B C ducatur ipsi C D ad rectos angulos D F. Et quoniam planum A B ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni A D ad rectos angulos in plano A B ducta est
a 4. Def. hujus. D E, erit a D E ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & D F perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ
b 13. hujus. sunt ex eadem parte, quod fieri non b potest. non igitur subjecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam D B, communem planorum



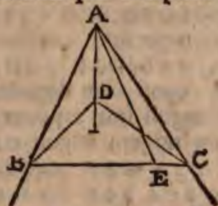
A B B C

AB BC sectionem. quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos; & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A, con-



stituatur [a] angulo DAB, in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales sunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est [b] æqualis. & quoniam duæ DB DC ipsi BC majores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. quòd cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC major basi EC; erit [c] angulus DAC angulo EAC major. sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

a 23. primi.
b 4. primi.
c 25. primi.

PROP. XXI. THEOR.

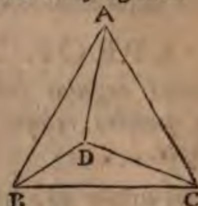
Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB con-

contentus. dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB AC AD quævis puncta B C D, & BC CD DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo majores [a] sunt:

a 20. hujus.

anguli igitur CBA ABD, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD majores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt [b] æqualis duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD CDA ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æqualis sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.



b 32. primi.

PROP. XXII. THEOR.

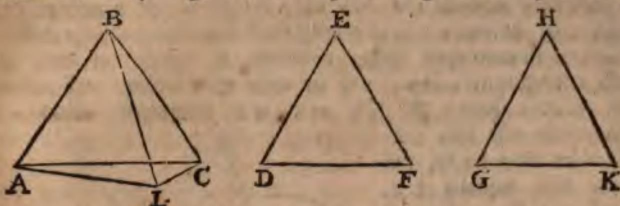
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC, DE EF, GH HK, & AC DF GK jungantur. dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales [a] erunt, & duæ reliqua majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad E H. major igitur est & [b] recta linea AC utravis ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF GK, reliqua esse majorem. dico & DF GK ipsa AG majores

a 4. primi.

b 24. primi.

majores esse. constituatur [c] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & uni c 23.primi.



ipsarum AB BC, DE EF, GH HK ponatur æqualis BL, & AL CL jungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. quod cum duæ LB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC major; basis DF basi LC major [d] erit. ostensa est autem GK æqualis AL. d 24.primi. ergo DF GK ipsis AL LC sunt majores; sed AL LC majores [e] sunt ipsa AC. multo igitur DF GK, ipsa AC majores e 20.primi. erunt. quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliqua majores sunt, quomodocunque sumptæ; ac propterea [f] fieri f 22.primi. potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

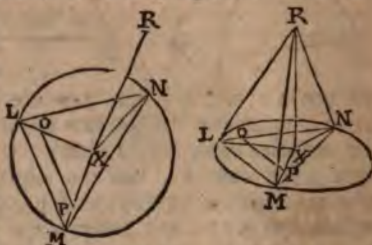
Sint dati tres anguli plano ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindantur æquales AB BC, DE EF, GH HK; & AC DF GK jungantur.

fieri

fieri igitur potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur [a] triangulum. Itaque [b] constituatur LMN, ita ut AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & præterea GK ipsi LN, & circa LMN triangulum circulus LMN [c] describatur: sumaturque ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra. sit primo intra: & LX MX NX jungantur. dico AB majorem esse ipsa LX. si enim non ita sit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. sit primo æqualis. quoniam igitur AB est æqualis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX æqualis BC, est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt, altera alteri; & AC basis basi LM æqualis ponitur. quare [d] angulus ABC angulo LXM est æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF est æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. sed tres LXM MXN NXL quatuor rectis sunt [e] æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor, & ponatur ipsi quidem AB æqualis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea LM parallela [f] est ipsi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. est [g] igitur ut XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando ut XL ad XO, ita LM ad OP. major autem est LX, quam XO. ergo & LM quam OP est major. sed LM posita est æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales sunt, & basis AC major basi OP; erit [h] angulus ABC angulo OXP major. similiter demonstrabimus & DEF angulum majorem esse angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL; tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL sunt majores. at anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. sed & [i] æquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quam LX.



[a] 22. hujus.
[b] 22. primi.
[c] 5. quarti.
[d] 8. primi.
[e] 2. Cor. 15. primi.
[f] 2. sexti.
[g] 4. sexti.
[h] 25. primi.
[i] 2. Cor. 15. primi.

L X. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem. ergo major ſit neceſſe eſt. conſtituatur *k* à puncto X circuli L M N plano ad rectos angulos X R. & exceſſui quo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex L X, ponatur æquale quadratum quod fit ex R X, & R L R M R N jungantur. quoniam igitur R X perpendicularis eſt ad planum D M N circuli, & ad unamquamque ipſarum L X M X N X erit *l* perpendicularis. & quoniam L X eſt æqualis X M, communis autem & ad rectos angulos X R, erit baſis L R æqualis *m* baſi R M. eadem ratione & R N utrique ipſarum R L R M eſt æqualis. tres igitur rectæ lineæ R L R M R N inter ſe æquales ſunt. & quoniam quadratum X R ponitur æquale exceſſui, quo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex L X; erit quadratum ex A B quadratis ex L X X R æquale. quadratis autem ex L X X R æquale eſt *n* quadratum ex R L; rectus enim angulus eſt L X R. ergo quadratum ex A B quadratum ex R L æquale erit; ideoque A B ipſi R L eſt æqualis. ſed ipſi quidem A B æqualis eſt unaquæque ipſarum B C D E E F G H H K: ipſi vero R L æqualis utraque ipſarum R M R N. unaquæque igitur ipſarum A B B C D E E F G H H K unicuique ipſarum R L R M R N eſt æqualis. quod cum duæ R L R M duabus A B B C æquales ſint, & baſis L M ponatur æqualis baſi A C: erit *o* angulus L R M æqualis angulo A B C. eadem ratione & angulus quidem M R N angulo D E F, angulus autem L R N angulo G H K eſt æqualis. ex tribus igitur angulis planis L R M M R N L R N, qui æquales ſunt rribus datis A B C D E F G H K ſolidus angulus conſtitutus eſt ad R.

k 12. hujus

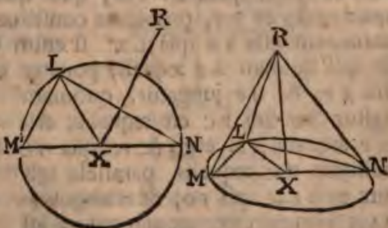
l 3. Def. hujus.

m 4. primi

n 47. primi

o 8. primi

Sed ſit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in M N, quod ſit X, & X L jungatur. dico rurſus A B majorem eſſe ipſa L X. ſi enim non ita ſit, vel A B eſt æqualis L X vel ipſa minor. ſit primo æqualis. duæ igitur A B B C, hoc eſt D E E F duabus M X X L, hoc eſt ipſi M N æquales ſunt. ſed M N ponitur æqualis D F. ergo D E E F ipſi D F ſunt æquales. quod fieri non *p* poteſt. non igitur A B eſt æqualis L X. ſimiliter neque minor. multo enim magis id quod fieri non poteſt ſequeretur. ergo A B ipſa L X major eſt. & ſimiliter ſi exceſſui quo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex L X æquale ponatur quadratum

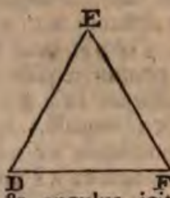


p 20. primi.

ex R X, & ipſa R X circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.

Sed ſit centrum circuli extra triangulum L M N, quod ſit X, & L X M X N X jungantur. dico & ſic A B ipſa L X majorem eſſe. Si enim non ita ſit, vel æqualis eſt, vel minor. ſit primo æqualis. ergo duæ A B B C duabus M X X L æquales ſunt, altera alteri; & baſis A C eſt æqualis baſi M L, angulus igitur A B C æqualis eſt angulo M X L. eadem ratione & G H K angulus ipſi L X N eſt æqualis; ac propterea totus M X N æqualis duobus A B C G H K. ſed & anguli A B C G H K angulo D E F majores ſunt. & angulus igitur M X N ipſo D E F eſt major. at quoniam duæ D E E F duabus M X X N æquales ſunt, & baſis D F æqualis baſi M N, erit M X N angulus angulo D E F æqualis. oſtenſus autem eſt major, quod eſt abſurdum. non igitur A B eſt æqualis L X: deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe. quare major neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos conſtituamus X R, & ipſam æqualem ponamus lateri quadrati ejus, quo quadratum ex A B ſuperat quadratum ex L X, problema conſtituetur. Dico vero neque minorem eſſe A B ipſa L X ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem A B æqualis ponatur X O, ipſi vero B C æqualis X P, & O P jungatur. quoniam igitur A B ipſi B C eſt æqualis, erit X P æqualis X P. ergo & reliqua O L reliquæ P M æqualis. parallela igitur [q] eſt L M ipſi P O, & triangulum L M X triangulo P X O æquiangulum eſt quare [r] ut X L ad L M, ita X O ad O P: & permutando ut L X ad X O, ita L M ad O P. major autem eſt L X quam X O. ergo L M quam O P eſt major. ſed L M eſt æqualis A C. & A C igitur quam O P major erit













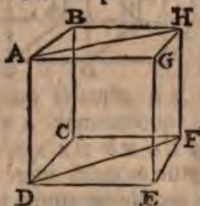
q 2. ſexti.
r 4. ſexti.

rit. itaque quoniam duæ A B B C duabus O X X P sunt æquales altera alteri; & basis A C major est basi O P; erit *f* angulus A B C angulo O X P major. similiter & si X R su- *f* 25. primi matur æqualis utrivis ipsarum X O X P, & jungatur O R, ostendemus angulum G H K angulo O X R majorem. constituatur ad rectam lineam L X, & punctum in ipsa X angulo quidem A B C æqualis angulus L X S, angulo autem G H K æqualis L X T, & ponatur utraque X S X T ipsi O X æqualis: junganturque O S O T S T. & quoniam duæ A B B C duabus O X X S æquales sunt, & angulus A B C æqualis angulo O X S erit basis A C, hoc est L M, basi O S æqualis. eadem ratione, & L M est æqualis ipsi O T. quod cum duæ M L L N duabus O S O T sint æquales, & angulus M L N major angulo S O T; erit & basis M N basi S T major. sed M N est æqualis D F. ergo & D F quam S T major erit. quoniam igitur duæ D E E F duabus S X X T æquales sunt, & basis D F major basi S T; erit angulus D E F angulo S X T major. æqualis autem est angulus S X T angulis A B C G H K. ergo D E F angulus angulis A B C G H K major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim C D G H parallelis planis A C G F B G C E F B A E contineatur. dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela B G C E, à plano A C secantur, communes ipsorum sectiones *a* parallelæ sunt: ergo A B ipsi C D est parallela. rursus *a* 16. hujus quoniam duo plana parallela B F A E secantur à plano A C, communes ipsorum sectiones parallelæ *a* sunt: parallela igitur est A D ipsi B C. ostensa autem est & A B parallela C D. ergo A C parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & unumquodque ipsorum C E F G G B B F A E parallelogrammum esse. jungantur A H D F. & quoniam parallela est A B quidem ipsi D C; B H vero ipsi C F, erunt A B B H sese tangentes, duabus D C C B sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales *b* angulos *b* 10. hujus. continebunt. angulus igitur A B H angulo D C F est æqualis. Et quoniam duæ A B B H duabus D C C F æquales *c* sunt, & *c* 34. primi. angulus



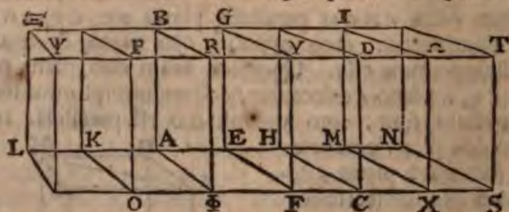
d 4. primi. angulus ABH æqualis angulo DCF, erit [d] basis AH basi DF aqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF. quod
e 41. primi. cum ipsius quidem ABH trianguli duplum [e] sit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. dico ut EFΦA basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidum EGCD. Producatur enim AH ex utraque parte: & ponantur ipsi



quidem EH æquales quotcunque HM MN; ipsi vero AE æquales quotcunque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR HΩ MT. quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ;
a 1. sexti. erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se [a] æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma KΞ KB AG, & adhuc
b 24. hujus. parallelogramma LΨ KP AR inter se [b] æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidi LP æqualia sunt tribus planis solidi
c 29. primi. KR, atque etiam solidi AY, [c] similia quoque sunt: sed tria tribus

tribus oppositis [d] sunt similia & æqualia. ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia [e] erunt. eadem ratione & tria solida ED HΩ MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius ED solidi: & si basis LF est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit; & si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY superabit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY ED; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & ED solidi, nempe basis NF, & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NT superare; & si æqualis æquale; & si minor minus. est igitur [f] ut AF basis ad basim FH, ita AY solidum ad solidum ED. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

[d] Cor. antecedent.
[e] 10. Def. hujus.
[f] 5. Def. quinti.

PROP. XXVI. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Sumatur in linea DF quodvis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur [a] perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; jungaturque DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus [b] constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos [c] erigatur HK; ponaturque ipsi GF æqualis KH, & HA jungatur. dico angulum solidum ad A qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D, angulis EDC EDF FDC contento. sumantur

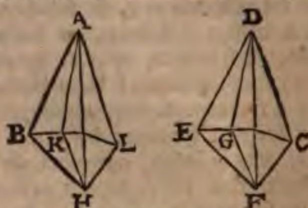




[a] 11. hujus.
[b] 23. prim.
[c] 12. hujus.

mantur enim æquales rectæ lineæ A B D E, & jungantur H B K B F E G E. quoniam igitur F G perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, suntque in subjecto plano, rectos faciet [d] angulos. uterque igitur angulorum F G D F G E rectus est. eadem ratione, & uterque ipsorum H K A H K B est rectus. & quoniam duæ K A A B duabus G D D E æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit [e] basis B K basi E G æqualis. est autem & K H æqualis G F, atque angulos rectos continent. æqualis [e] igitur erit H B ipsi F E. rursus quoniam duæ A K K H duabus D G G F æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis A H basi D F æqualis: estque A B æqualis D E. duæ igitur H A A B duabus F D D E sunt æquales; & basis H B est æqualis basi F E. ergo angulus [f] B A H angulo E D F æqualis erit. eadem ratione, & angulus H A L angulo F D C est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales A L D C, & jungamus K L H L G C F C, quoniam totus B A L est æqualis toti E D C, quorum B A K ipsi E D G ponitur æqualis; erit reliquus K A L æqualis reliquo G D C. & quoniam duæ K A A L duabus G D D C æquales sunt, & angulos æquales continent; basis K L basi G C [e] æqualis erit. est autem & K H æqualis G F, duæ igitur L K K H, duabus C G G F sunt æquales; angulosque rectos continent: ergo basis H L æqualis est basi F C. rursus quoniam duæ H A A L, duabus F D D C æquales sunt, & basis H L æqualis basi F B; erit angulus H A L [f] æqualis angulo F D C. atque factus est angulus B A L angulo E D C æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod facere oportebat.

[d] 3. Def. hujus.
[e] 4. primi.
[f] 8. primi.



PROP. XXVII. PROBL.

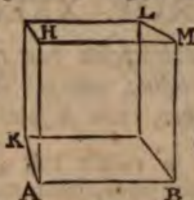
Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

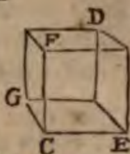
Sit recta quidem linea A B; datum vero solidum parallelepipedum C D. oportet ad datam rectam lineam A B dato solido parallelipedo C D simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam A B,

&

& ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis [a] angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF, & fiat [b] ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt [c] æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB dato solido parallelipipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelipipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.

[a] 26. huj.
[b] 12. se.
[c] Cor. 2 hujus.





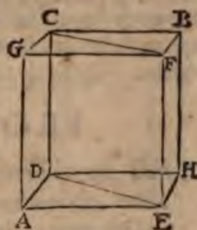
PROP. XXVIII. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim æquale [a] est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale [b], oppositum enim est; & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH & BE CE; etenim planis, & numero & magnitudine æqualibus continentur. ergo totum AB solidum

[a] 34. pri.
[b] 24. hu.

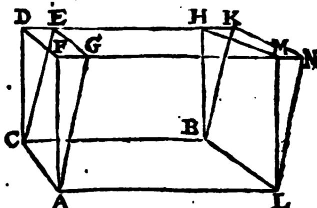


dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes lineæ sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelipipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB, 4. primi. utrique ipsarum DH EK [a] æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æ- 3. primi. qualis est reliquæ HK. quare & [b] DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum 4. hujus. CF parallelogrammo [c] BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.



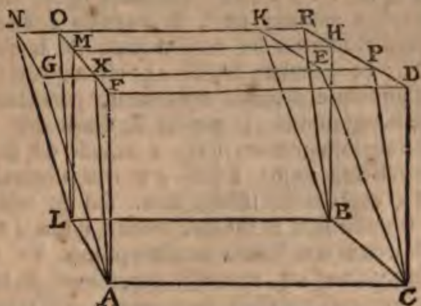
PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in iisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE

BH

BH BK non sint in eisdem rectis lineis. dico solidum CM solido CN æquale esse. producantur enim NK DK, & GE FM, conveniantque inter se punctis E X; & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR jungantur. solidum CM, cujus basis quidem ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est ᵃ æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL & ei oppositum XPRO, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. sed solidum CO, cujus basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est ᵃ æquale solido CN, cujus basis ACBL parallelogrammum, & ipsi oppositum GEKN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

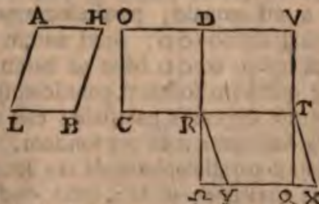


ᵃ 29. hujus

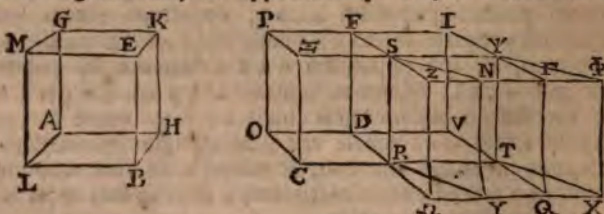
PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadem altitudine. dico solidum AE solido CF æquale esse. sint primo stantes HK BE AG LM OP DF CΞ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturque ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis ᵃ angulus TRY. & ponatur ipsi quidem AL æqualis ᵃ 23. primi. RT,

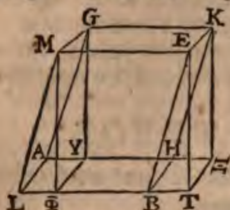


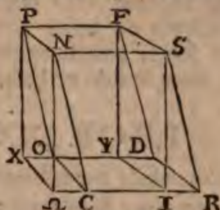
RT, ipſi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipſi RT parallela ducatur YX, compleaturque parallelogrammum RX, & ΨY ſolidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales ſunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & ſimile parallelogrammo HL: & quoniam rurſus AL eſt æqualis RT, & LM ipſi RS, anguloſque æquales continent, parallelegrammum RΨ parallelogrammo AM æquale & ſimile erit. eadem ratione LE parallelogrammum ipſi SY æquale eſt & ſimile. tria igitur parallelogramma ſolidi AE tribus parallelogrammis ſolidi ΨY æqualia & ſimilia ſunt. ſed & tria tribus oppoſita &
Cor. 24. hujus. [b] æqualia ſunt & ſimilia. totum igitur AE ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo ΨY eſt æquale. producantur DR XY, conveniantque inter ſe in puncto Ω, & per T ipſi DΩ parallela ducatur TQ, & producantur TQ OD, & conveniant in V, compleaturque ſolida ΩΨ RI. ſolidum igitur ΨΩ cujus baſis eſt RΨ parallelogrammum, oppoſitum
29. hujus. autem ipſi ΩΓ, eſt [c] æquale ſolido ΨY, cujus baſis eſt RΨ parallelogrammum, & oppoſitum ipſi YΦ, in eadem enim



ſunt baſi RΨ, & eadem altitudine, & eorum ſtantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΨΓ ΨΦ in eiſdem ſunt rectis lineis ΩX ZΦ. ſed ſolidum ΨY æquale eſt ſolido AE. ergo & ΨΩ ſolido AE eſt æquale: præterea quoniam parallelogrammum RYXT eſt æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem eſt baſi RT, & in eiſdem parallelis RT ΩX. & parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD eſt æquale, quoniam & ipſi AB eſt æquale; parallelogrammum ΩT æquale eſt parallelogrammo CD: aliud autem eſt parallelogrammum DT. eſt igitur ut CD baſis ad baſim DT, ita ΩT ad ipſam DT. & quoniam ſolidum parallelepipedum CI ſecatur plano RF planis oppoſitis parallelo; erit ut [d] CD baſis ad baſim DT, ita ſolidum CF ad RI ſolidum. eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum ΩI ſecatur plano RΨ oppoſitis pla-
d 25. hujus. nis parallelo, ut ΩT baſis [d] ad baſim DT, ita erit ſolidum ΩΨ ad RI ſolidum, ſed ut CD baſis ad baſim DT, ita baſis ΩT ad ipſam TD. ut igitur ſolidum CF ad RI ſolidum ita ſolidum

ſolidum ΩΨ ad ſolidum RI. quod cum utrumque ſolidorum CF ΩΨ ad ſolidum RI eandem habet proportionem, ſolidum CF ſolido ΩΨ eſt æquale. ſolidum autem ΩΨ oſtenſum eſt æquale ſolido AE. ergo & [e] AE ipſi CF æquale erit. e 9. quin





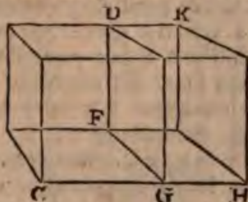
Sed non ſint ſtantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipſis AB CD baſibus. dico rurſus ſolidum AE æquale eſſe ſolido CF. ducantur [f] à punctis K E G M, P F N S ad ſubjectum planum perpendiculares KΞ ET GY MΦ, SI FΨ NΩ PX, & plano in punctis Ξ T Y Φ. Ψ X Ω I occurrant, & jungantur ΞT YΦ ΞY TΦ XΨ XΩ ΩI ΨI. æquale igitur eſt KΦ ſolidum ſolido PI; in æqualibus enim ſunt baſibus KM PS, & eadem altitudine, quorum ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed KΦ ſolidum ſolido AE eſt [g] æquale: ſolidum vero PI æquale [g] ſolido CF. ſi quidem in eadem ſunt baſi, & eadem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in eiſdem rectis lineis. ergo & ſolidum AE ſolido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus ſunt baſibus & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat. f 11. huju g 29. huju

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint ſolida parallelepipeda AB CD, quæ eandem altitudinem habeant. dico inter ſe eſſe ut baſes; hoc eſt ut AE baſis ad baſim CF ita ſolidum AB ad CD ſolidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE æquale FH, & à baſi FH eadem altitudine ipſi CD ſolidum parallelepipedum GK compleatur. ſolidum igitur AB ſolido GK eſt [a] æquale; in æqualibus enim a 31. huju





enim sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur oppositis
25. hujus. planis parallelo; erit ut [b] HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum; atque est basis quidem FH basi AE æqualis, solidum vero GK æquale solido AB. est igitur & ut AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB CD. latus autem AE homologum sit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipsis AE GE HE: & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN æqualis EL; & adhuc ipsi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO solidum compleatur. quoniam igitur duæ KE EL duabus CF FN æquales sunt: sed & angulus KEL angulo CFN est æqualis; quia & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum simile & æquale parallelogrammo CN. eadem ratione, & parallelogrammum KM æquale est & simile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & similia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia [a] sunt & similia.
Cor. 24. hujus. totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido CD. compleatur GK parallelogrammum; & à basibus quidem GK KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi AB, solida compleantur EX LP. & quoniam ob similitudinem solidorum AB CD est ut AE ad CF, ita EG ad FN; & EH ad FR: æqualis autem FC ipsi EK, & FN ipsi EL, &





FR

F R ipſi E M. erit ut A E ad E K, ita G E ad E L, & H E ad E M. ſed ut A E quidem ad E K, [b] ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K: ut autem G E ad E L, ita G K ad K L: & ut [b] H E ad E M, ita P E ad K M. & ut igitur A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K, ita G K ad K L, & P E ad K M. ſed ut A G quidem ad G K, ita [c] A B ſolidum ad ſolidum E X: ut autem G K ad K L, ita ſolidum E X ad P L ſolidum: & ut P E ad K M, ita P L ſolidum ad ſolidum K O. & ut igitur ſolidum A B ad ſolidum E X, ita [d] E X ad P L, & P L ad K O. ſi autem quatuor ſint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem [e] habet ejus, quam habet ad ſecundam. ergo & A B ſolidum ad ſolidum K O triplicatam habet proportionem ejus, quam A B ad E X. ſed ut A B ad E X, ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K; & A E recta linea ad ipſam E K. quare & A B ſolidum ad ſolidum K O triplicatam proportionem habebit ejus, quam A E habet ad E K. æquale autem eſt ſolidum K O ſolido C D, & recta linea E K rectæ C F eſt æqualis. ergo & A B ſolidum ad ſolidum C D triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipſius homologum A E habet ad C F homologum latus. Quod demonſtrare oportebat.

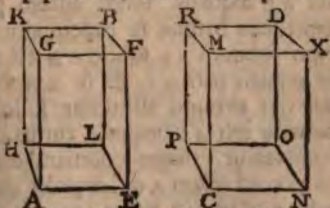
[b] 1. ſexti.
[c] 32. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 11. Def. quinti.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum quod ſit à prima ad ſolidum quod à ſecunda, ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad ſecundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium ſolidorum parallelepipedorum reciprocantur baſes & altitudines; & quorum ſolidorum parallelepipedorum reciprocantur baſes & altitudines, ea inter ſe ſunt æqualia.

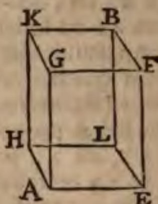
Sint æqualia ſolida parallelepipeda A B C D. dico ipſorum baſes & altitudines reciprocari, hoc eſt ut E H baſis ad baſim N P, ita eſſe altitudinem ſolidi C D ad ſolidi A B altitudinem. Sint enim primo ſtantes A G E F L B H K C M N X O D P R ad rectos angulos baſibus ipſorum.

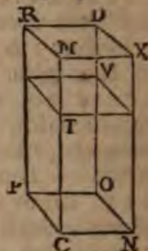


dico ut E H baſis ad baſim N P, ita eſſe C M ad A G. ſi igitur

baſis

basis EH basi NP sit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD; erit & CM æqualis ipsi AG. si [d] enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sunt AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solido CD æquale erit: ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. sed EH sit major. est autem & AB solidum solido CD æquale. ergo major est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia.

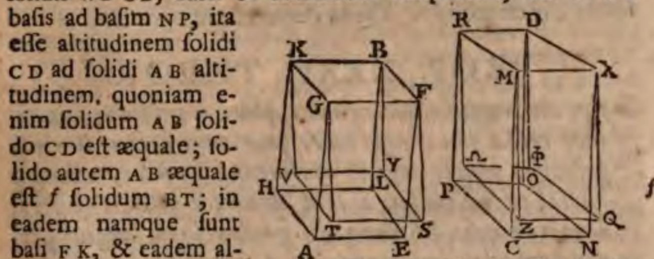




itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud
7. quinti. autem aliquod est VC, & æqualia [a] ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB solidum ad solidum VC, ita CD solidum ad solidum CV. sed ut AB solidum ad solidum CV,
32. hujus. ita [b] basis EH ad NP basim; æque alta enim sunt AB CV solida.
25. hujus. ut autem solidum CD ad ipsam CV, ita [c] MP basis ad basim
1. sexti. PT, & MC [d] ad CT. & igitur ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG. ergo & ut EH basis ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur: sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in
31. hujus. æqualibus basibus & eadem altitudine inter se [e] æqualia sunt ergo solidum AB solido CD est æquale. Sed non sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH major. major igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AG; æqualis autem est AG ipsi CT: erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed ut basis EH ad

NP basim, ita AB solidum ad solidum VC; æque alta enim sunt solida AB CV. ut autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. quòd cum utrumque solidorum AB CD ad ipsam CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sint autem stantes FE BL GA KH, XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K, X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V, Q Z Ω Φ occurrant & compleantur solida FV XΩ. dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD, bases & altitudines reciprocari, scil. ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est *f* solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est *æquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases *g* & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP. ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum DZ DC, itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur, sitque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. dico solidum AB solido CD æquale esse. iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo



f 30. hujus

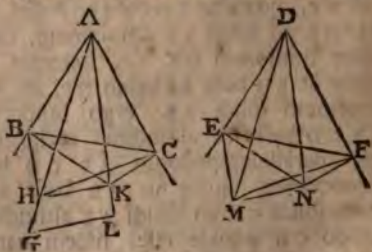
g Ex ante demonstratis.

altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum AB BT, & ipsorum CD DZ. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorum BT DZ parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidum quidem BT æquale est solido BA, etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido DC, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AB solido CD est æquale. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt, anguli perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à punctis A D sublimes rectæ lineæ AG DM constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG DM quævis puncta G, M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN occurrentes planis in punctis L N; & LA ND jungantur.



dico angulum GAL angulo MDN æqualem esse. ponatur ipsi DM æqualis AH, & per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum

per

per BAC. ergo & HK ad [a] planum per BAC perpendicularis erit. ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE jungantur. quoniam igitur quadratum ex HA æquale [b] est quadratis ex HK KA; quadrato autem ex KA æqualia [b] sunt ex KC CA quadrata: erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est quadratum est HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA [c] est rectus. eadem ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi DFM est æqualis. est autem & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet HA ipsi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus [d] æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC est æqualis DF. similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse. jungantur enim HB ME. & quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. sed quadratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quòd & HK perpendicularis est ad subjectum planum. quadratum [b] igitur ex AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH [c] rectus est. eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: atque est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE [d] est æqualis. quoniam igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. sed & angulus BAC angulo FDE est æqualis. basis [e] igitur BC basi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt. ergo angulus ACB angulo DFE est æqualis. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus est æqualis angulo FEN. itaque duo triangula sunt BCK FEN, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, videlicet BC ipsi EF. ergo & [d] reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus DF FN æquales sunt: & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqualis basi DN. & cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; etenim

[a] 8. hujus.
[b] 47. primi.
[c] 48. primi.
[d] 26. primi.
[e] 4. primi.

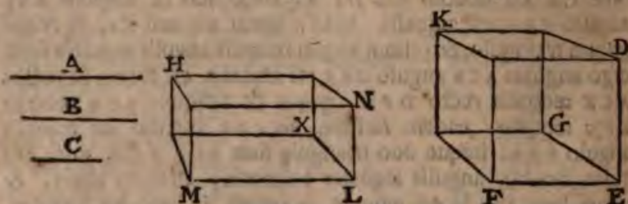
nim rectus eſt angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia ſunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus ſit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM ſunt æqualia. quorum quadratum ex AK æquale eſt quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM eſt æquale. & ideo recta linea HK ipſi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales ſint, altera alteri, & baſis HK baſi NM oſtenſa ſit æqualis; angulus HAK
f 8. primi. angulo MDN æqualis f erit. Quod oportebat demonſtrare.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio poſitis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipſis ad plana, in quibus ſunt primi anguli, ducantur, inter ſe æquales eſſe.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales ſint, ſolidum parallepepipedum quod à tribus fit, æquale eſt ſolido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, ſit ſcil. ut A ad B ita B ad C. dico ſolidum quod fit ex ipſis A B C, æquale eſſe ſolido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur ſolidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED; & ipſi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipſarum DE GE EF; & ſolidum



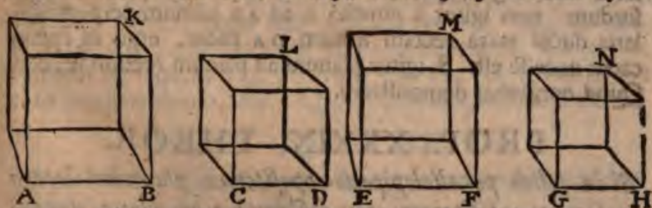
parallelepipedum EX compleatur: ipſi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in
a 26. hujus. ipſa L, conſtituatur a angulo ſolido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN; & ponatur ipſi quidem B æqualis LN, ipſi vero C æqualis LX. quoniam igitur eſt ut A ad B ita B ad C, æqualis autem eſt A ipſi LM, & B unicuique ipſarum LN EF EG ED, & C ipſi LX; erit ut LM ad EF ita

ita GE ad LX. & circum æquales angulos MLX GEF, latera sunt reciproca. ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GF est [b] æquale. & quoniam duo anguli plani recti- [b] 14. sexti. linei æquales sunt GEF XLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LN ED æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [c] perpendiculares quæ à punctis N D ad [c] Cor. 35. hujus. plana per XLM GEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se [d] sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK. [d] 31. hujus. atque est solidum quidem HL quod fit à tribus A B C, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, sit scil. ut AB ad CD, ita EF ad GH, & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. dico ut KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit [a] KA ad LC triplicatam proportionem ejus



quam AB habet ad CD. eadem ratione & solidum ME ad ipsum NG [a] triplicatam proportionem habebit ejus quam [a] 33. hujus. habet EF ad GH. atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. dico, ut

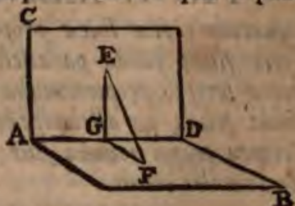
 recta

recta linea A B ad rectam C D, ita esse rectam E F ad ipsam
b 33. hujus. G H. quoniam enim rursus A K ad L C triplicatam b proportionem habet ejus quam A B habet ad C D; habet autem & M E ad N G triplicatam proportionem ejus quam E F ad G H; atque ut A K ad L C, ita M E ad N G: erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe C D ad planum A B rectum sit, communis autem eorum sectio sit A D, & in ipso C D plano, quodvis punctum E sumatur. dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum A B ducitur, cadere in ipsam A D. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut E F; & plano A B in puncto F occurrat: à puncto autem F ad D A in plano A B perpendicula-



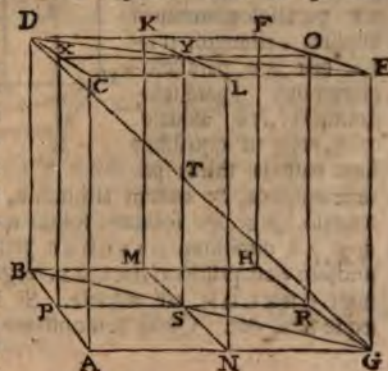
a 10. primi. ris a ducatur F G, quæ quidem
b 4. Def. hujus. & plano C D ad b rectos angulos erit; & E G jungatur. quoniam igitur F G plano C D est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea E G quæ est in eodem C D plano:
c 3. Def. hujus. erit angulus F G E c rectus. sed & E F plano A B ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus E F G. quare trianguli
d 17. primi. E F G duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est d absurdum. non igitur à puncto E ad A B planum perpendicularis ducta extra rectam lineam D A cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido perallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallepipedo A F, oppositorum planorum C F A H latera bifariam secentur in punctis K L M N X O R P.
&

& per sectiones plana ducantur KN XR; communis autem planorum sectio sit YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS, DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY YE BS SG. quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se æquales [a] sunt. & quoniam DX quidem est æqualis OE, XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit [b] basis DY æqualis basi YE. & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id [c] recta linea est DYE. eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG. & quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB: parallela igitur [d] est DE ipsi BG. & sumpta sunt in utraque ipsarum quævis puncta D Y G S, & junctæ sunt DG YS. ergo DG YS in uno [e] sunt plano. quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis [a], alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis [f] ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. quare DT quidem est æqualis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare.



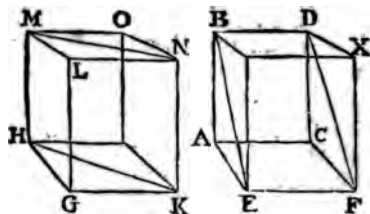
[a] 29. primi.
[b] 4. primi.
[c] 14. primi.
[d] 33. primi.
[e] 7. hujus.
[f] 15. primi.

PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æquæ alta ABCDEF GHKLMN. & unum quidem basim babeat parallelogrammum AF, alterum vero

GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. Compleantur enim AX GO solida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum [a] trianguli GHK: erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se æqualia [b] sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium [c] ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium [c] est prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. Quod demonstrare oportebat.



a 41. primi.
b 31. hujus.
c 28. hujus.

EUCLIDIS

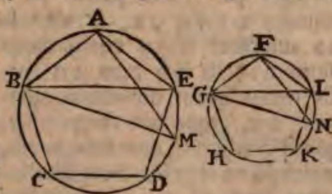
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO. I. THEOREMA.

Similia polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipſis ſimilia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum ſint BM GN. dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita eſſe ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. jungantur enim BE AM KL FN. & quoniam polygonum ABCDE ſimile eſt polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL eſt æqualis: atque eſt ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula ſunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum [a] eſt; ac propterea angulus AEB æqualis eſt angulo FLG. ſed angulus quidem AEB angulo AMB eſt [b] æqualis; in eadem enim circumferentia conſiſtunt. angulus autem FLG æqualis [b] eſt angulo FNG. ergo & AMB angulus eſt æqualis angulo FNG. eſt autem & rectus [c] angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur eſt triangulum AMB triangulo FGN. ergo [d] ut BM ad GN ita BA ad GF. ſed proportionis quidem BM ad GN duplicata eſt proportio quadrati ex BM ad



a 6. ſexti.
b 21. tertii.
c 31. tertii.
d 4. ſexti.

a 20. sexti. quadratum ex GN; proportionis vero BA ad GF duplicata a est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL: & ut igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, C, quarum major AB. dico si ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB: dividatúrque DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiunt divisionibus quæ in DE: sint igitur divisiones AK KH HB, divisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam major est DE quam AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG: ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH: erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD, quam HA: & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF; ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK: reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD æqualis ipsi C ergo C quam AK est major. minor igitur est AK quam C. ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK, exposita minori magnitudine



tudine

tudine C minor. Quod demonſtrare oportebat. Similiter autem demonſtrabitur, etiam ſi dimidia ablata fuerint. *Eſt prima decimi.*

PROP. II. THEOR.

Circuli inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipſorum ſint BD FH. dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſſe circuli ABCD ad EFGK circulum. Si enim non ita ſit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. ſit primum ad minus quod ſit S. & in circulo EFGH deſcribatur quadratum EFGH. itaque deſcriptum in circulo quadratum majus eſt dimidio circuli EFGH, quoniam ſi per puncta E F G H contingentes circulum ducamus, erit deſcripti circa circulum quadrati [a] dimidium EFGH. deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. ergo quadratum EFGH majus eſt dimidio circuli EFGH. ſecentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit: quoniam ſi per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ ſunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit [b] unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt. ſed ſegmentum minus eſt parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. Haſce igitur circumferentias bifariam ſecantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta, quæ minora erunt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur, rurſus majus quam dimidium,



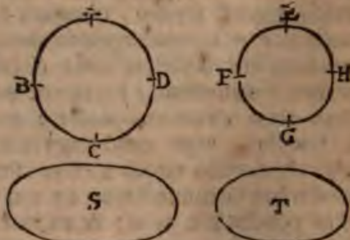
[a] 47. primi. & 31. tertii.





[b] 41. primi.

dium, & hoc ſemper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta circuli E F G H in rectas lineas E K K F F L L K G M M H H N N E, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus E F G H ipſum S ſpatium ſuperat. ergo reliquum E K F L G M H N polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo A B C D, polygono E K F L G M H N ſimile polygonum A X B O C P D R. eſt igitur ut quadratum ex B D
1. hujus. ad quadratum ex F H, [c] ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum. ſed & ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita A B C D circulus ad ſpatium S. ergo &
11. quinti. [d] ut circulus A B C D ad ſpatium S, ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum. major autem eſt circulus A B C D eo quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpa-
14 quinti. tium S majus eſt [e] polygono E K F L G M H N. ſed & [f] minus.
Ex prius demonſtratis. quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H ita A B C D circulus ad ſpatium aliquod minus circulo E F G H. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita circulum E F G H ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D. dico igitur neque eſſe ut quadratum ex B D ad quadratnm ex F H, ita circulum A B C D ad aliquod ſpatium majus circulo E F G H. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. erit igitur invertendo ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita ſpatium S ad A B C D circulum. ſed quoniam S majus eſt E F G H circulo; erit ut ſpatium S ad A B C D circulum, ita circulus E F G H ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D. ergo & ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita E F G H circulus ad aliquod ſpatium minus [e] circulo A B C D, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita eſt circulus A B C D ad ſpatium aliquod majus E F G H circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita erit A B C D circulus ad circulum E F G H. Circuli igitur inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata. Quod oſtendere oportebat.



PROP

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duos pyramides æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis, cujus basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimdio totius pyramidis esse majora. secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD; erit [a] EG ipsi DB parallela. eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est [b] æqualis EB. sed EB ipsi AE est æqualis. ergo & AE ipsi HK æqualis erit. est autem & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis [c] angulo KHD; basis igitur [d] EH basi KD est æqualis: quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos [e] continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL. rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit [d] basis EG basi KL æqualis: æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H, æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum KHL, & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB, parallela ducta est HK; erit triangulum ADB triangulo DKH æquiangulum,



[a] 2. sexti
[b] 34. prim
[c] 29. prim
[d] 4. prim
[e] 10. undecimi.

angulum, & latera habent proportionalia. ſimile igitur eſt ADB triangulum triangulo DHK. & eadem ratione triangulum quidem DBC ſimile eſt triangulo DKL: triangulum vero ADC triangulo DHL. & cum duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes BA AC duabus rectis lineis ſeſe tangentibus KH HL parallelæ ſint, non exiſtentes in eodem plano, hæ æqua-
10. undecimi. les angulos [f] continebunt. angulus igitur BAC angulo HKL eſt æqualis. atque eſt ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo
6. ſexti. ABC triangulum [g] ſimile eſt triangulo HKL; ideoque pyra-
1. Def. ejuſdem mis, cujus baſis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis triangulum HKL, & vertex punctum D. ſed pyramis cujus baſis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi, cujus baſis triangulum AEG, & vertex H punctum. quare & pyramis cujus baſis triangulum ABC & vertex punctum D, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis A E G triangulum, & vertex punctum H. utraque igitur ipſarum AEGH HKLD pyramidum ſimilis eſt toti pyramidi ABCD. & quoniam BF eſt æqualis FC,
41. primi. erit EBFG parallelogrammum [h] duplum trianguli GFC. & quoniam duo priſmata æque alta ſunt, quorum unum quidem baſim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, eſtque parallelogrammum duplum
40. undecimi. trianguli; erunt ea priſmata inter ſe æqualia [i]. ergo priſma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrammis EBFG EBKH KHGF, eſt æquale priſmati quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifeſtum eſt utrumque ipſorum priſmatum, & cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, oppoſita autem ipſi HK recta linea, & cujus baſis eſt GFC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum KLH, majus eſſe utraque pyramidum, quarum baſes quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta H D: quoniam ſi jungamus EF EH rectas lineas, priſma quidem, cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, & oppoſita ipſi recta linea KH, majus eſt pyramide cujus baſis EBF triangulum, vertex autem punctum K. ſed pyramis, cujus baſis
10. Def. undecimi. triangulum EBF, & vertex K punctum, eſt [k] æqualis pyramidi cujus baſis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus enim & ſimilibus planis continentur. quare & priſma cujus baſis parallelogrammum EBFG, oppoſita autem

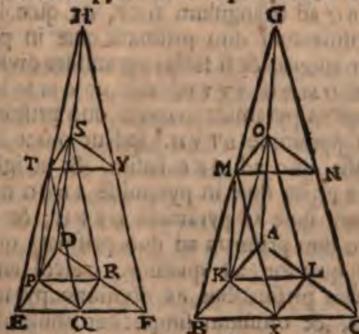
ipſi

ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis AEG triangulum & vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum EBFG, & opposita ipsi recta linea HK est æquale prismati cujus basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cujus basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi cujus basis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quarum bases triangula AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Quæ ostendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in dua prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices autem sint puncta G H, & dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia; & factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat. dico ut ABC basis ad basim DEF, ita esse prismata omnia quæ sunt in pyramide ABCG ad prismata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia.



Quoniam enim BX quidem est æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit [a] XL ipsi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC simile. eadem ratione & triangulum

[a] 2. sexti.

gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis FC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est

b 22. sexti. igitur b ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum

c 28. & 32. undecimi. RQF, ita c prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum &

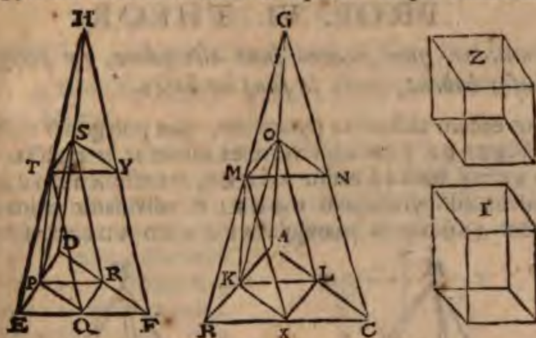
d 11. quinti. oppositum ipsi STY. ut igitur d ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cujus basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH; & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DPRS, & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem ſunt altitudine, & triangulares baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum baſes quidem triangula A B C D E F, vertices autem puncta G H. dico ut A B C baſis ad baſim D E F, ſic eſſe pyramidem A B C G ad D E F H pyramidem. Si enim non ita ſit, erit ut A B C baſis ad baſim D E F, ſic A B C G pyramis, vel ad ſolidum minus pyramide D E F H, vel ad majus. ſit primum ad ſolidum minus, ſitque Z. & dividatur pyramis D E F G in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia. ſunt duo igitur priſmata [a] dimidio totius pyramidis majora. & rurſus pyramides ex diviſione factæ ſimiliter dividantur, atque hoc ſemper fiat, quoad ſumantur quædam pyramides à pyramide D E F H, quæ ſint minores exceſſu quo pyramis D E F H ſolidum Z ſuperat. itaque ſumantur, & a 3. hujus.



ſint exempli cauſa, pyramides D P R S S T Y H. erunt igitur reliqua in pyramide D E F H priſmata ſolido Z majora. dividatur etiam A B C G pyramis in totidem partes ſimiles pyramidi D E F H. ergo [b] ut A B C baſis ad baſim D E F, ita quæ in pyramide A B C G priſmata ad priſmata quæ in pyramide D E F H. ſed ut A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramis A B-C G ad ſolidum Z. & igitur ut A B C G pyramis ad ſolidum Z, ita quæ in pyramide A B C G priſmata ad priſmata quæ in pyramide D E F H. major autem eſt pyramis A B C G priſmatibus quæ in ipſa ſunt. ergo & ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide D E F H, eſt majus. ſed & [c] minus. quod fieri non poteſt. non igitur ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt pyramis A B C G ad ſolidum aliquod minus pyramide D E F H. ſimiliter oſtendemus neque ut D E F baſis ad baſim

b 4. hujus.

c Ex prius demonſtratis.

basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCH minus. dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I. erit igitur invertendo ut DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide EDFH, erit ut solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant ABCDE FGHKL: vertices autem M N puncta. dico ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN. dividatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis vero





FGHKL dividatur in triangula FGH FHK FKL. & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, [a] ita ABCM pyramis ad pyramidem ACDM: & componendo ut ABCD trapezium ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ACDM. sed & ut ACD triangulum ad ADE, ita [a] pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex æquali, ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM.

[a] 5. hujus.

&

& rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. eadem ratione, & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent, & eadem sunt altitudine; erit [a] ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN. quòd cum sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM; ut autem ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN: erit ex æquali, ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed & ut FKL basis ad basim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex æquali, ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim BD EC CD. & quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD [a] æquale. ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis [b] est pyramidi, cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, & vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi cujus basis EBC triangulum, & vertex punctum D. rursus quoniam FCBE parallelogrammum est cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est [a] æquale. ergo & pyramis cujus basis BEC triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est [b] pyramidi cujus basis triangulum ECF, & vertex punctum D. sed pyramis cujus



[a] 34. primi.

[b] 5. hujus.

basis quidem B C E triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum A B D, & vertex C punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum C E F, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cujus basis triangulum A B D, & vertex C punctum. prisma igitur A B C D E F dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis cujus basis A-B D triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum C A B, & vertex D punctum, iisdem namque planis continetur; pyramis autem, cujus basis triangulum A B D, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis A B C triangulum, & oppositum ipsi D E F: & pyramis igitur, cujus basis triangulum A B C, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet A B C triangulum, & oppositum ipsi triangulum D E F. Quod demonstrare oportebat.



COROLL.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem; dividitur in prismata quæ triangulares bases habent, basibusque opposita etiam triangula.

2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

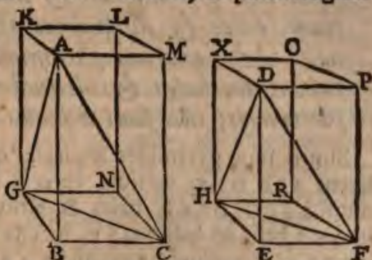
PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportione homologorum laterum.

Sint similes & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula A B C D E F, vertices autem G H puncta. dico A B C G pyramidem ad pyramidem D E F H, triplicatam proportionem habere ejus quam B C habet ad E F. Compleantur enim B G M L E H P O solida parallelepipeda. & quoniam pyramis A B C G similis est pyramidi D E F H, erit [a] angulus A B C angulo D E F æqualis, angulusque G B C æqualis angulo H E F, & angulus A B G angulo D E H. atque [b] est ut A B ad D E, ita B C ad E F, & B G ad E H. quoniam igitur est ut

[a] 9. Def. undecimi.
[b] 1. Def. sexti.

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera ſunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP ſimile erit. eadem ratione, & parallelogrammum BN ſimile eſt parallelogrammo FR, & parallelogrammum BK ipſi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER ſunt ſimilia. ſed tria quidem MB BK BN tribus oppoſitis [c] æqualia & ſimilia ſunt, tria vero EP EX ER tribus oppoſitis æqualia & ſimilia. quare ſolida BGML EHPO ſimilibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [d] ſimile eſt BGML ſolidum ſolido EHPO. ſimilia autem ſolida parallelepipeda in [e] triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo ſolidum BHML ad ſolidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. ſed [f] ut BGML ſolidum ad ſolidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim ſexta pars eſt ipſius ſolidi, cum priſma quod eſt dimidium ſolidi parallelepipedi, ſit pyramidis [g] triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quàm BC habet ad EF. Quod demonſtrare oportebat.



c 24. undecimi.

d 9. Def. undecimi.

e 33. undecimi.

f 15. quinti

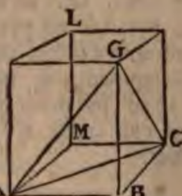
g 1. Cor. antecedentis.

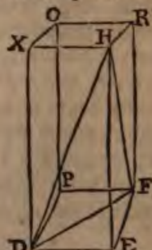
Cor. Ex hoc perſpicuum eſt, & ſimiles pyramides quæ multangulas baſes habent, inter ſe eſſe in triplicata proportione homologorum laterum. ipſis enim diviſis in pyramides triangulares baſes habentes: quoniam & ſimilia polygona, quæ ſunt in baſibus, in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens baſim ad pyramidem in altera triangularem baſim habentem, ita & omnes pyramides in una pyramide triangulares habentes baſes ad omnes in altera triangulares baſes habentes; hoc eſt, ita pyramis ipſa multangulam habens baſim ad pyramidem quæ multangulam baſim habet. ſed pyramis triangularem habens baſim ad pyramidem quæ triangularem baſim habet, eſt in triplicata proportione homologorum laterum. & pyramis igitur polygonam habens baſim ad pyramidem ſimilem baſim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illæ ſunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares baſes habeant A B C D E F, vertices vero G H puncta. dico pyramidum A B C G D E F H baſes & altitudines reciprocari; ſcil. ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſſe pyramidis D E F H altitudinem ad altitudinem pyramidis A B C G. Compleantur enim B G M L E H P O ſolida parallelepipeda. & quoniam pyramis A B C G eſt æqualis pyramidi D E F H, atque eſt pyramidis quidem A B C G ſextuplum B G M L ſolidum, pyramidis vero
a 15. quinti. D E F H ſextuplum ſolidum E H P O; erit a ſolidum B G M L ſolido E H P O æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocan-
b 34. undecimi. tur b. eſt igitur ut B M baſis ad baſim E P, ita E H P O ſolidi altitudo ad altitudinem ſolidi B G M L. ſed ut B M baſis ad baſim E P, ita a A B C triangulum ad triangulum D E F. ergo





& ut A B C triangulum ad triangulum D E F, ita ſolidi E H P O altitudo ad altitudinem ſolidi B G M L. ſed ſolidi quidem E H B O altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis D E F H; ſolidi vero B G M L altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis A B C G: eſt igitur ut A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G. quare pyramidum A B C G D E F H baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales. Et ſi pyramidum A B C G D E F H baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, ſitque ut A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G: dico A B C G pyramidem pyramidi D E F H æqualem eſſe. iiſdem enim conſtructis, quoniam ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt D E F H pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G; ut autem A B C baſis ad baſim D E F, ita B M parallelogrammum ad parallelogrammum E P: erit & ut parallelogrammum B M ad E P parallelogrammum, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem

nem pyramidis A B C G. ſed pyramidis quidem D E F H altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi E H P O; pyramidis vero A B C G altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi B G M L: eſt igitur ut B M baſis ad baſim E P, ita E H P O ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi B G M L. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur, ea c ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedum B G M L æquale eſt ſolido parallelepipedo E H P O. atque eſt ſolidi quidem B G M L ſexta pars pyramis A B C G: ſolidi vero E H P O itidem ſexta pars pyramis D E F H. ergo pyramis A B C G pyramidi D E F H eſt æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illæ ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare. c 34. undecimi.

PROP. X. THEOR.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum A B C D, & altitudinem æqualem. dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. ſit primo major quam triplus. & deſcribatur in A B C D circulo quadratum A B C D. ergo quadratum A B C D majus eſt quam dimidium A B C D circuli. & à quadrato A B C D erigatur priſma æque altum cylindro. quod quidem priſma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum A B C D quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti. & ſint ab eiſdem baſibus erecta ſolida parallelepipeda æque alta, nimirum priſmata ipſa. quare priſmata inter ſe ſunt a ut baſes. & priſma igitur erectum à quadrato A B C D dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulum A B C D deſcribitur. atque eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulum A B C D. priſma igitur erectum à quadrato A B C D æque altum cylindro, dimidio cylindri eſt majus. ſecentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H, & A E E B B F F C C G G D D H a 2 Cor. 7. hujus.



 HA

HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus [b] est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoqne triangulorum AEB EFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est. quoniam si per puncta E F G H parallelæ ipsis AB BC CD DA ducantur, & compleantur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea [c] quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quæ minores erunt excessu, quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam, & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum [d] est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni. & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed & minor: (ab ipso enim comprehenditur.) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eandem quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur,



[b] ...enditur. 2. hujus.

[c] Lemma hujus.

[d] 1. Cor. 7. hujus.

pellantur, erit ᵃ quod à quadrato A B C D erigitur, dimidium ejus, quod erectum eſt à quadrato circa circulum deſcripto; etenim inter ſe ſunt ut baſes. quare & tertiæ partes ipſarum. pyramis igitur cujus baſis quadratum A B C D, dimidia eſt ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum deſcripto erigitur. ſed pyramis erecta à quadrato deſcripto circa circulum, major eſt cono; ipſum namque comprehendit. ergo pyramis cujus baſis A B C D quadratum, vertex autem idem qui coni, major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H. & jungantur A E E B B F F G C G G D D H H A. & unumquodque igitur triangulorum A E B B F C C G D D H A majus eſt quam dimidium portionis circuli A B C D, in qua conſiſtit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major eſt quàm dimidium portionis coni quæ eſt ad ipſam. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc ſemper facientes, ᶜ relinquemus tandem quaſdam coni portiones quæ minores erunt exceſſu quo conus tertiam cylindri partem ſuperat. relinquantur; & ſint quæ in ipſis A E E B B F F C C G G D D H H A. reliqua igitur pyramis cujus baſis polygonum A E B F C G D H, & vertex idem qui coni, major eſt quam tertia cylindri pars. ſed pyramis cujus baſis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis cujus baſis polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem quæ cylindri. priſma igitur cujus baſis A E B F C G D H polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus eſt cylindro cujus baſis eſt circulus A B C D. ſed & minus: (ab ipſo enim comprehenditur.) quod fieri non poteſt. non igitur cylindrus minor eſt quam triplus coni. oſtenſum autem eſt neque majorem eſſe quam triplum. ergo cylindrus coni triplus ſit neceſſe eſt; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem quam ipſe baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonſtrare oportebat.



PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases,

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli A B C D E F G H, axes autem K L M N, & diametri basium A C E G. dico ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita esse conum A L ad E N conum. Si enim non ita sit; erit ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod solidum minus cono E N, vel ad majus. sit primo ad minus quod sit X. & quo minus est solidum X cono E N, ei æquale sit I solidum. conus igitur E N ipsis solidis X I est æqualis. describatur in E F G H circulo quadratum E F G H, quod majus est dimidio circuli. erigatur à quadrato E F G H pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major est coni dimidio. nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circum-
6. hujus. scriptæ dimidium: etenim inter se ª sunt ut bases. conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis cujus basis quadratum E F G H, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. ᶜ secentur circumferentiæ E F F G G H H E ᶜ bifariam in punctis P R S O; & O E E P P F F R R G G S S H H O jungantur. unumquodque igitur triangulorum H O E E P F F R G G S H majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum H O E E P F F R G G S H pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque
Lemma ejus. altas cono, atque hoc semper facientes, ᵇ relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis H O O E E P P F F R R G G S S H.



SH. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum HOEP-FRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido X. describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex FG, ita [c] DTAY-BQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus [d] ad circulum EFGH: erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, [e] ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HO-EPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, [a] ita pyramis cujus basis DTAY-BQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso. majus igitur est solidum X pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus. quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. Si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD ita erit solidum Z ad AL conum. sed cum sit solidum Z majus cono EN; erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed ut conus ad conum, ita [f] est cylindrus ad cylindrum; est enim uterque utriusque [g] triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

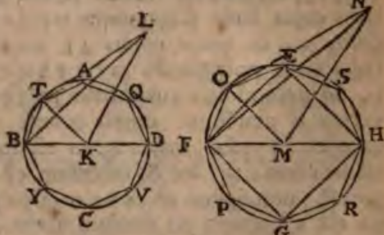
c 1. huj[us]
d 2. hujus
e 11. quin[ti]
f 15. quinti
g 10. hujus

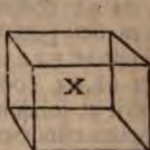
PROP.

PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter ſe ſunt in triplicata proportione diametrorum quæ ſunt in baſibus.

Sint ſimiles coni & cylindri, quorum baſes quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero baſium BD FH, & axes conorum vel cylindorum KL MN. dico conum cujus baſis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus baſis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod ſolidum minus cono EFGHN triplicatam proportionem, vel, ad majus. Habeat primo ad minus, quod ſit X. & deſcribatur in EFGH. circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH majus eſt dimidio EFGH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major eſt quam coni dimidium. itaque ſecentur EF FG GH HE circumferentiæ biſariam in punctis O P R S, & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus eſt dimidio ſegmenti circuli EFGH, in quo conſiſtit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major eſt quam dimidium portionis coni, quæ eſt ad ipſam. ſecantes igitur reliquas circumferentias biſariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc ſemper facientes, [a] tandem relinquemus quaſdam coni portiones quæ minores erunt exceſſu quo conus EFGHN ipſum X ſolidum ſuperat. relinquantur, & ſint quæ in ipſis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cujus baſis quidem polygonum EOFP-





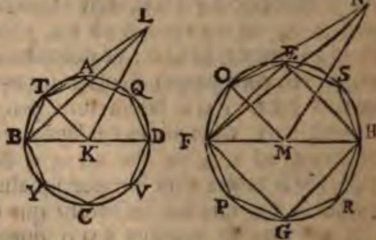


[a] Lemma hujus.

EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major eſt ſolido X. deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus: & triangulorum continentium pyramidem cujus baſis quidem eſt polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum ſit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus baſis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum ſit NFO: & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL ſimilis eſt cono EFGHN, erit [b] ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN, ut autem BD ad FH, [c] ita BK ad FM. itaque ut BK ad FM ita KL ad MN: & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque eſt, & circa æquales angulos BKL FMN latera ſunt proportionalia: ſimile igitur [d] eſt BKL triangulum triangulo FMN. Rurſus quoniam eſt ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera ſunt proportionalia; etenim quæ pars eſt angulus BKT quatuor rectorum qui ſunt ad K centrum, eadem eſt pars & angulus FMO quatuor rectorum qui ſunt ad centrum M: erit [b] triangulum BKT triangulo FMO ſimile. & quoniam oſtenſum eſt ut BK ad KL, ita eſſe FM ad MN; æqualis autem eſt BK ipſi KT, & FM ipſi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera ſunt proportionalia; recti enim ſunt: triangulum igitur LKT ſimile eſt triangulo MNO. quod cum ob ſimilitudinem triangulorum BKL FMN, ſit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob ſimilitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rurſus cum ob ſimilitudinem triangulorum LTK NOM, ſit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob ſimilitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF. oſtenſum autem eſt & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rurſus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia ſunt latera, ideoque æquiangula ſunt LTB NOF triangula, & inter ſe [e] ſimilia. quare & pyramis cujus baſis triangulum BKT, vertex autem L punctum, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis FMO triangulum, & vertex punctum N; ſimilibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem ſimiles, & quæ triangulares baſes habent, in [f] triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM. ſimiliter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas lineas

[b] 24. Def. undecimi.
[c] 15. quinti.
[d] 6. ſexti.
[b] 6. ſexti.
[e] 5. ſexti.
[f] 8. hujus.

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc est quam BD ad
12.quinti. FH. sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totum pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum



EOFPGRHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est



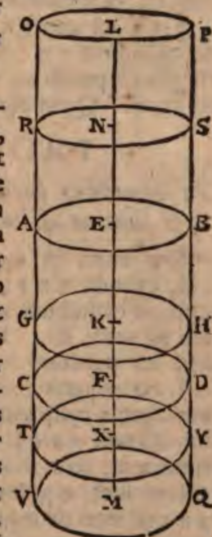
pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso; etenim eam comprehendit. majus igitur est & solidum X pyramide cujus basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N. sed & minus. quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD, itaque dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo

vertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD. cum autem est solidum Z majus cono EFGHN; erit ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod majus cono EFGHN, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ut autem conus ad conum, ita [h] cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, coni [i] triplus est, cum ostensum sit, omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH. Similes igitur coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

[h] 15. quinti
[i] 10. hujus

PROP. XIII. THEOR.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M: & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM: & per puncta L N X M ducantur plana ipsis AB, CD parallela: atque in planis per L N X M circa centra L N X M intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsi AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se [a] ut bases. æquales autem sunt bases. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter se

[a] 11. hujus.

ſe æquales ſint, itemque cylindri PR RB BG inter ſe æquales; ſitque ipſorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipſorum PR RB BG: quotuplex eſt axis KL ipſius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GE. eadem ratione & quotuplex eſt MK axis ipſius axis KF, totuplex eſt & QG cylindrus cylindri GD. & ſi quidem axis KL ſit æqualis axi KM, erit & PF cylindrus cylindro GQ æqualis; ſi autem axis LX major ſit axe KM, & cylindrus PG major erit cylindro GQ; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD, ſumpta ſunt æque multiplicia, axis quidem EK, & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis vero KF, & cylindri GD æque multiplicia, axis ſcilicet KM, & GQ cylindrus: & demonſtratum eſt ſi LK axis ſuperat axem KM, & PG cylindrum ſuperare cylindrum GQ; & ſi æqualis æqualem; & ſi minor minorem.



b 5. Def. quinti. eſt b igitur axis EX ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare ſi cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus baſibus AB CD, cylindri EB FD. dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL. Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipſi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter ſe a ſunt ut baſes. baſes autem ſunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter ſe æquales erunt. & quoniam cylindrus FM ſecatur plano CD, oppoſitis planis parallelo, erit b ut CM

a 11. hujus.

b 13. hujus.



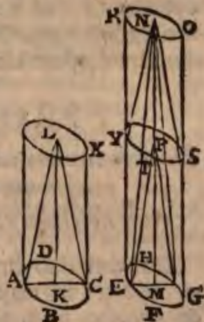
cylin-

cylindrus ad cylindrum F D, ita axis L N ad K L axem. æqualis autem eſt cylindrus quidem C M cylindro E B; axis vero L N axi G H. eſt igitur ut E B cylindrus ad cylindrum F D, ita axis G H ad K L axem. ut autem E B cylindrus ad cylindrum F D, ita [c] A B G conus ad conum C D K; cylindri ſunt enim conorum [d] tripli. ergo & ut G H axis ad axem K L, ita eſt A B G conus ad conum C D K, & cylindrus E B ad F D cylindrum. In baſibus igitur æqualibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines. Quod demonſtrare oportebat. c 16. quinti. d 10. hujus.

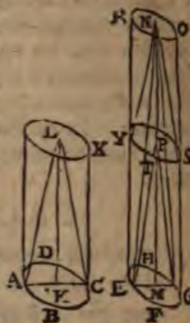
PROP. XV. THEOR.

Æqualium conorum & cylindrorum baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum baſes & altitudines reciproce ſunt proportionales, illi inter ſe ſunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum baſes quidem A B C D E F G H circuli, & diametri ipſorum A C E G; axes autem K L M N; qui quidem & conorum vel cylindorum ſunt altitudines: & compleantur cylindri A X E O. dico cylindrorum A X E O baſes & altitudines reciproce proportionales eſſe, hoc eſt, ut A B C D baſis ad baſim E F G H, ita eſſe altitudinem M N ad altitudinem K L. altitudo enim K L vel æqualis eſt altitudini M N, vel non æqualis. Sit primo æqualis. atque eſt A X cylindrus æqualis cylindro E G. qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter ſe ſunt [a] ut baſes. æqualis igitur eſt baſis A B C D baſi E F G H. eſt igitur ut baſis A B C D ad E F G H baſim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. non ſit autem altitudo K L altitudini M N æqualis, ſed major ſit M N, & auferatur, ab ipſa M N altitudini L K æqualis P M, & per P ſecetur E O cylindrus plano T Y S oppoſitis planis circulorum E F G H R O parallelo, intelligaturque cylindrus E S cujus baſis quidem E F G H circulus, altitudo autem P M. quoniam igitur A X cylindrus æqualis eſt cylindro E O, alius autem aliquis eſt cylindrus E S; erit ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. ſed ut A X cylindrus ad cylindrum E S, [a] ita baſis A B C D ad E F G H baſim; cylindri enim A X E S eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus E O ad E S cylindrum a 11. hujus.



b 13. hujus. drum [b], ita MN altitudo ad altitudinem MP; nam cylindrus EO secatur plano TYS, oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL. quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce sunt proportionales.



Sed si cylindrorum AX EO bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. dico AX cylindrum cylindro EO æqualem esse. Iisdem enim constructis; quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP: erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP.
c 11. hujus. sed ut ABCD basis ad basim EFGH, [c] ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem: ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita [b] cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylin-
d 9. quinti. dro EO est [d] æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Duobus circulis circa idem centrum exstentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in majori circulo ABCD polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur per K centrum recta linea BD, atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG, & ad C producatur, quæ
a 16. tertii. AC circulum EFGH [a] tanget.



Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus di-
b Lemma hujus. midium rursus bifariam, & hoc semper facientes, [b] tandem relinquemus

linquemus circumferentiam minorem ipſa A D. relinquatur ſitque L D: & à puncto L ad B D perpendicularis [c] agatur L M, & ad N producatur; junganturque L D D N. ergo L D ipſi D N eſt [d] æqualis, & quoniam L N parallela eſt A C, & A C tangit circulum E F G H; ipſa L N circulum E F G H non tanget. & multo minus tangent circulum E F G H rectæ lineæ L D D N. quod ſi ipſi L D æquales deinceps circulo A B C D aptabimus, deſcribetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum E F G H. Quod facere oportebat.

c 12. primi.

d 3. & 29. tertii.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum polyhedrum deſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat.

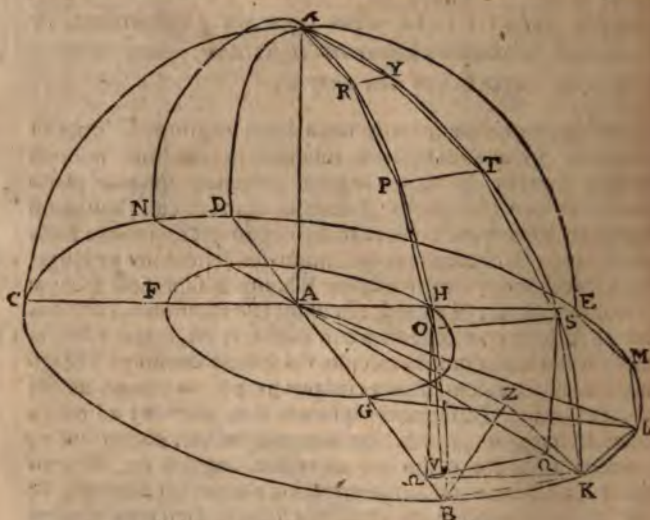
Intelligantur duæ ſphæræ circa idem centrum A. oportet in majori ſphæra deſcribere ſolidum polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. Secentur ſphæræ plano aliquo per centrum ducto: ſectiones erunt circuli; quoniam diametro manente & ſemicirculo circumducto ſphæra facta [a] eſt: ergo in quacunque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planum in ſuperficie ſphæræ circulum efficiet; & conſtat circulum eſſe maximum, cum diameter ſphæræ quæ & ſemicirculi diameter eſt, major [b] ſit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel ſphæra ducuntur. ſit igitur in majori quidem ſphæra circulus B C D E, in minori autem circulus F G H; & ducantur ipſorum duæ diametri ad rectos inter ſe angulos B D C E. occurrat B D minori circulo in G; ducatur à puncto G ipſi A G ad rectos angulos G L, & jungatur A L. itaque circumferentiam E B bifariam ſecantes, & dimidium ipſius bifariam, atque hoc ſemper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli B C D, quæ ſubtenditur à recta æquali ipſi G L. relinquatur, ſitque circumferentia B K. minor igitur eſt recta B K quam G L; eritque B K latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangentis minorem circulum. ſint igitur polygoni latera in quadrante circuli B E, rectæ B K K L L M M E; & puncta K A producantur ad N: & à puncto A plano circuli B C D E ad rectos angulos [c] conſtituatur A X, quæ ſuperficiei ſphæræ in puncto X occurrat, & per A X & utramque ipſarum B D K N plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in ſuperficie ſphæræ maximos circulos. itaque efficiant, & ſint in diametris B D

a Def. 14. undecimi.

b 15. tertii.

c 12. undecimi.

K N eorum ſemicirculi B X D K X N. quoniam igitur X A recta eſt ad planum circuli B C D E, erunt omnia plana quæ per
d 18. undecimi. ipſam X A tranſeunt, ad idem circuli planum d recta: quare & ſemicirculi B X D K X N recti ſunt ad idem planum. & quoniam ſemicirculi B E D B X D K X N æquales ſunt in æqualibus enim conſiſtunt B D K N diametris; erunt & eorum quadrantes B E B X K X inter ſe æquales. quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante B E, tot erunt & in quadrantibus B X K X, æqualia ipſis B K K L L M M E. deſcribantur, & ſint B O O P P R R X, K S S T T Y Y X: junganturque S O T P Y R; & ab ipſis O S ad planum circuli B C D E
e 38. undecimi. perpendiculares ducantur. cadent hæ in e communes planorum ſectiones B D K N, quoniam & plana



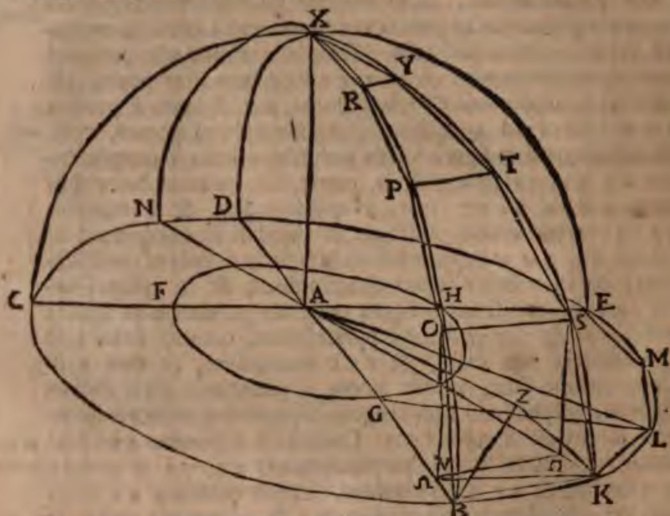


ſemicirculorum B X D K X N ad planum circuli B C D E recta ſunt. itaque cadant, ſintque O V S Q, & V Q jungatur. cum igitur in æqualibus ſemicirculis B X D K X N, æquales circumferentiæ ſumptæ ſint B O K S, & ductæ perpendiculares O V S Q, erit O V quidem ipſi S Q æqualis, B V vero æqualis K Q eſt autem & tota B A æqualis toti K A. ergo & reliqua V A reliquæ Q A eſt æqualis. igitur ut B V ad V A, ita
f 2. ſexti. K Q ad Q A: ideoque V Q ipſi B K parallela f eſt. quod cum utraque ipſarum O V S Q recta ſit ad circuli B C D E planum,
erit

erit OV ipsi SQ [g] parallela. ostensa autem est & ipsi æqua- [g] 6. unde-
lis. ergo QV SO æquales [h] sunt & parallelæ. & quoniam cimi.
QU parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & [h] 33. primi.
[i] SO ipsi KB parallela: & ipsas conjungunt BO KS. ergo & [i] 9. unde-
KBOS quadrilaterum est in uno [k] plano: nam si duæ rectæ cimi.
lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta [k] 7. unde-
sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cimi.
est plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in uno sunt plano. est autem in [l] uno plano & triangulum YRX. si igitur à punctis [l] 2. unde-
OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, con- cimi.
stituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus, composita, quarum bases quidem KBOS SOPT, TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A. quòd si in unoquoque laterum KL LM ME, quemadmodum in KB eadem construamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio, constituetur figura quædam polyhedra in sphæra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. dico dictam figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à [m] puncto A ad pla- [m] 11. unde-
num quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto cimi.
Z occurat, & BZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano [n] rectos [n] 3. Def.
angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est undecimi.
perpendicularis. & quoniam AB est æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK æquale: & sunt quadrato quidem ex AB æqualia [o] quadrata ex AZ ZB, angulus [o] 47. primi.
enim ad Z rectus est; quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æquale: ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & intervallo una ipsarum ZB ZK descriptus etiam per puncta O S transibit. & quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS & minor OS, erit angulus BZK obtusus; ideoque BK major quam BZ. sed & GL quam BK est major multo. igitur major est GL quam BZ. & quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis AL ipsi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale:

 sed

ſed quadrato quidem ex AL æqualia ſunt quadrata ex AG GL, quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrata igitur ex AG GL æqualia ſunt quadratis ex BZ ZA: quorum quadratum ex BZ minus eſt quadrato ex GL: ergo reliquum ex ZA quadratum majus eſt quadrato ex AG;



& ob id recta linea ZA major eſt recta AG. atque eſt AZ quidem ad unam polyhedri baſim, AG vero ad ſuperficiem minoris ſphæræ perpendicularis. quare polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tanget. Duabus igitur ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum deſcriptum eſt minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. Quod facere oportebat.

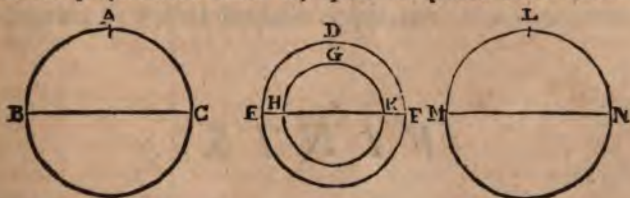
Cor. Quod ſi etiam in altera ſphæra ſolido polyhedro deſcripto, in ſphæra BCDE ſimile ſolidum polyhedrum deſcribatur; habebit ſolidum polyhedrum in ſphæra BCDE ad ſolidum polyhedrum in altera ſphæra triplicatam proportionem ejus, quam diameter ſphæræ BCDE habet ad alterius ſphæræ diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales, & ejuſdem ordinis: erunt pyramides ſimiles. ſimiles autem pyramides inter ſe in triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis cujus baſis eſt KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera ſphæra ejuſdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum

homologum latus; hoc eſt, quam habet A B ex centro ſphæræ circa centrum A exiſtentis, ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. ſimiliter & unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphæræ circa centrum A, ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in altera ſphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. quare totum ſolidum polyhedrum, quod eſt in ſphæra circa centrum A, ad totum ſolidum polyhedrum, quod in altera ſphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam quæ eſt ex centro alterius ſphæræ, hoc eſt, quam habet B D diameter ad alterius ſphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter ſe in triplicata ſunt proportione ſuarum diametrorum.

Intelligantur ſphæræ A B C D E F; quarum diametri B C E F. dico A B C ſphæram ad ſphæram D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F. Si enim non ita eſt, ſphæra A B C ad ſphæram minorem ipſa D E F, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Habeat primo ad minorem, videlicet ad G H K. & intelligatur ſphæra D E F circa idem centrum, circa quod ſphæra G H K: deſcribaturque in majori ſphæra D E F ſolidum polyhedrum non tangens [a] minorem ſphæram G H K in ſuperficie; & in ſphæra A B C deſcribatur ſolidum polyhedrum ſimile ei, quod in ſphæra D E F deſcri- [a] 17. hujus



ptum eſt. ſolidum igitur polyhedrum, quod in ſphæra A B C, ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra D E F, triplicatam [b] proportionem habet ejus, quam B C ad E F. habet autem A B C ſphæra ad ſphæram G H K triplicatam proportionem ejus, quam B C ad E F. ergo ut A B C ſphæra ad ſphæram G H K, ita ſolidum polyhedrum in ſphæra A B C ad ſolidum polyhedrum in ſphæra D E F; & permutando, ut A B C [b] Cor. antecedente.

sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita GHK sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF. major autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphæra polyhedro, quod in sphæra DEF, est major. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphæram ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC. dico insuper sphæram ABC neque ad majorem sphæram ipsa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF. Si enim fieri potest, habet ad majorem LMN. invertendo igitur, sphæra LMN ad ABC sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem sphæra LMN ad ABC sphæram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC, quoniam sphæra LMN major est ipsa DEF. ergo & DEF sphæra ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad sphæram majorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad sphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF. Quod demonstrare oportebat.

FINIS.

LIBRI *Venales apud* Richardum Clements *Bibliopolam* Oxonienſem.

ROgeri Aſchami Epiſtolarum Libri Quatuor cui acceſſit Joannis Saturmii aliorumque ad Aſchamum Angloſque Eruditos Epiſtolarum Liber unus 8vo. Oxoniæ 1703.

Spicilegium SS. Patrum ut & Hæreticorum Seculi poſt Chriſtum Natum 1. 2. 3. Cura Joannis Erneſti Grabii Editio Altera Auctior 2 vol. 8vo. Oxon. 1714.

M.Fab.Quintilliani Declamationum Liber 8vo.1692.

C. Suetonii Tranquilli opera omnia notis Illuſtrata Oxonii. 1676.

Theodoſii Sphæricorum Libri Tres. G. Lat. 8vo. Oxon. 1707.

Græcæ Linguæ Dialecti. in uſum Scholæ Weſtmonaſterienſis Opera ac ſtudio Mich. Maittaire A. M. Londini 1712. 8vo.

Caſpari Bartholini Sprcimen Philoſophiæ Naturalis accedit de Fontium Fluviorumque Origine 12mo.1713.

Smith Aditus ad Logicam, & Elementa Logicæ Oxoniæ 1694.

Liberti Fromondi Meterrologicorum Libri ſex Londini 1670.

DuTrieu manuductio ad LogicamOxoniæ 8vo.1678. Mocket de Politiâ Eccleſiæ Anglicanæ. Londini 1705.

a^2

Fig

TRIGONOMETRIÆ
Planæ & Sphæricæ
ELEMENTA.

ITEM

DE NATURA

ET

ARITHMETICA

LOGARITHMORUM

TRACTATUS BREVIS.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO MDCCXXIII.

Impensis *Ric. Clements* Bibliop. *Oxoniensis*.

TRIGONOMETRIÆ
Planæ & Sphæricæ
ELEMENTA.

DEFINITIONES.

EX datis Trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera laterumve rationes, & mixtim aſſequi, Trigonometriæ munus eſt. Ad quod præſtandum, neceſſe eſt, ut non tantum Peripheriæ circulares, ſed & rectæ lineæ circulis adſcriptæ, in notas aliquot & certas partes ſecari ſupponantur.

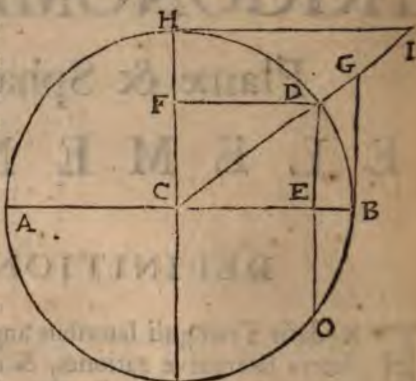
Placuit itaque Veteribus Mathematicis, peripheriam circuli in 360 partes (quos gradus appellant) dividere; & unumquemque gradum in 60 minuta prima, & hæc ſingula in 60 ſecunda, & rurſus horum unumquodque in 60 minuta Tertia, & ita continuo partiri. Et angulus quilibet dicitur eſſe tot graduum & minutorum, quot ſunt in arcu qui angulum illum metitur.

Quidam gradum in partes centeſimas, potius quam ſexageſimas partiri volunt: & utilius fortaſſe eſſet, non gradus ſed & ipſum circulum in decupla ratione ſecare; quæ diviſio forſan aliquando obtinebit. Verum ſi circulus conſtet 360 gradibus, ejus quadrans quæ eſt menſura anguli recti, erit harum partium 90. Si circulus in 100 partes ſecetur, Quadrans erit 25 partim.

Complementum Arcus, eſt differentia ejus à Quadrante.

Chorda ſive *ſubtenſa* eſt recta linea ab uno Arcûs termino ad alterum ducta.

Sinus rectus alicujus arcus qui & ſimpliciter ſinus dici ſolet, eſt perpendicularis cadens ab uno arcus termino ad radium per alterum terminum ejuſdem Arcus ductum. Eſt igitur ſemiſubtenſa dupli Arcus; ſcil. eſt D E $= \frac{1}{2}$ DO, & eſt arcus D O duplus ipſius D B. Hinc ſinus arcus 30. gr. æqualis eſt dimidio radii, nam per 15 El. 4. Latus Hexagoni circulo inſcripti, hoc eſt, ſubtenſa 60 gr. æqualis eſt radio. Sinus dividit Radium in duo ſegmenta C E E B; quorum unum C E quod centro & ſinu recto intercipitur, eſt ſinus complementi arcûs D B ad quadrantem (nam eſt C E $=$ F D qui eſt ſinus arcus D H) & vocatur *coſinus*. Alterum ſegmentum B E quod ſinu recto & peripheria intercipitur, vocatur *ſinus verſus*: aliquando dicitur Arcûs *ſagitta*.



Quod ſi per unum Arcus terminum D producatur à centro recta C G, donec occurrat rectæ B G ſuper diametro ad ejus terminum B perpendiculari; vocabitur in Trigonometria C G *Secans*, & B G *Tangens* arcus D B.

Coſecans & Cotangens Arcûs eſt ſecans vel tangens Arcus, qui eſt complementum alterius ad Quadrantem. *Nota*. Sicut eadem eſt Chorda Arcûs & ejuſdem complementi ad ſemicirculum. Sic idem eſt ſinus, eadem Tangens, eademque ſecans Arcûs & ejuſdem complementi ad ſemicirculum.

Sinus Totus eſt ſinus maximus, ſeu ſinus 90 graduum qui circuli radio æqualis eſt.

Canon Trigonometricus eſt Tabula, quæ à minuto incipiens, ſeriatim exhibet quas habent longitudines ſinguli ſinus Tangentes & Secantes, reſpectu radii, qui unitatis loco

loco ponitur, & in partes 10 000 000 vel plures decimales dividi intelligitur. Adeo ut ope hujus Tabulæ, cujuslibet Arcûs vel anguli ſinus Tangens vel ſecans haberi poteſt; Et viciſſim ex dato ſinu Tangente vel ſecante dabitur qui iis reſpondet arcus vel angulus. Obſervandum eſt in ſequentibus R eſſe notam Radii, S notam ſinus, coS coſinus, T notam Tangentis, & coT coTangentis.

CONSTRUCTIO CANONIS.

PROP. I. THEOREMA.

Datis duobus quibuſlibet Trianguli rectanguli lateribus, reliquum quoque dabitur.

Vide figuram propoſitionis tertiæ.

Eſt enim per 47 Elementi primi $ACq = ABq + BCq$ & $ACq - BCq = ABq$, & viciſſim $ACq - ABq = BCq$. unde per extractionem Radicis quadratæ, dabitur $AC = \sqrt{ABq + BCq}$ & $AB = \sqrt{ACq - BCq}$, & $BC = \sqrt{ACq - ABq}$.

PROP. II. PROBL.

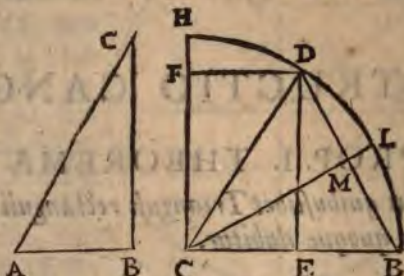
Dato DE ſinu arcus DB. Invenire Coſinum DF.

Ex datis CD radio & DE ſinu, in Triangulo rectangulo CDE dabitur per præcedentem $CE = \sqrt{CDq - DEq} = DF$.

PROP. III. PROBL.

Dato D E sinu arcus cujusvis D B. Invenire D M vel B M sinum arcus dimidii.

Dato DE dabitur per præcedentem CE, ac proinde EB quæ est differentia inter cosinum & Radium. In Tri-



angulo igitur rectangulo DBE datis DE & EB dabitur DB cujus semissis DM est sinus arcus DL = $\frac{1}{2}$ arcus DB.

PROP. IV. PROBL.

Dato B M sinu arcus B L invenire sinum dupli Arcus.

Dato BM sinu, dabitur per Prop. 2. cosinus CM. Sunt autem Triangula CBM DBE æquiangula, ob angulos ad E & M rectos & angulum ad B communem, quare (per 4. 6.) erit CB : CM :: BD vel 2 BM : DE. Unde cum dantur tres priores hujus Analogiæ termini, quartus quoque qui est sinus arcus DB innotescet.

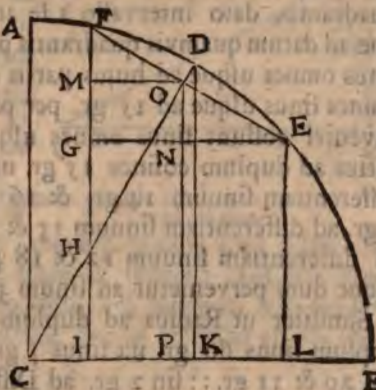
Corol. Est CB : 2 CM :: BD : 2 DE, hoc est, Radius ad duplum cosinus arcus $\frac{1}{2}$ DB ut subtensa arcus DB ad subtensam dupli arcus. Item est CB : 2 CM : : (2 BM : 2 DE : :) BM : DE : : $\frac{1}{2}$ CB : CM. unde dato sinu arcus alicujus & sinu arcus dupli, dabitur cosinus arcus simpli.

PROP.

PROP. V.

Datis sinubus duorum arcuum B D F D, Invenire F I sinum summæ arcuum, Item E L sinum differentiæ eorundem.

Ducatur Radius C D, & sit C O cosinus arcus F D, qui proinde dabitur. per O agatur O P parallela ad D K. Item ducantur O M G E parallelæ ad C B. Et ob æquiangula triangula C D K C O P C H I F O H F O M. Est primò C D : D K :: C O. O P, quæ itaque innotescet. Item est C D : C K :: F O : F M, adeoque & illa nota erit. sed ob F O = E O erit F M = M G = O N. Est itaque O P + F M = F I = sinui summæ arcuum: & O P — F M, hoc est, O P — O N = E L sinui differentiæ arcuum. Q. E. I.



Coroll. Quia arcuum B E B D B F differentiæ sunt æquales, Erit B D arcus medius arithmeticus inter arcus B E B F.

PROP. VI.

Iisdem positis, Radius est ad duplum cosinus arcus medii, ut sinus differentiæ ad differentiam sinuum extremorum.

Nam est C D : C K :: F O : F M, unde duplicando consequentes C D : 2 C K :: F O . 2 F M vel ad F G ; quæ est differentia sinuum E L F I. Q. E. D.

Cor. 1. Si arcus B D sit 60 grad. Erit differentia sinuum F I F L æqualis F O sinui distantiæ. Nam in eo casu sit C K sinus 30 grad. cujus duplum æquale est radio,

 adeoque

adeoque ob CD = 2 CK erit FO = FG. Adeoque si duo arcus BE BF ab arcu 90 gr. æquidistent, erit differentia sinuum æqualis sinui distantiæ FD.

Cor 2. Hinc si dentur sinus omnium arcuum, dato intervallo à se invicem distantium ab initio quadrantis usque ad 60 gradus, facile inveniuntur reliqui per unicam additionem. Est enim sinus 61 gr. = sinui 59 gr. + sin 1 gr. & sinus 62 gr. = sinui 58 gr. + sin 2 gr. Item sinus 63 gr. = sinui 57 gr. + sin 3 gr. & ita deinceps.

Cor. 3. Si habeantur sinus omnium arcuum ab initio quadrantis, dato intervallo à se invicem distantium, usque ad datum quamvis quadrantis partem, dabuntur exinde sinus omnes usque ad hujus partis duplum. *ex. g.* Dentur omnes sinus usque ad 15 gr. per præcedentem Analogiam inveniri possunt sinus omnes usque ad 30 gr. Nam est ratius ad duplum cosinus 15 gr. ut sinus unius gradus ad differentiam sinuum 14 gr. & 16 gr. ita etiam est sinus 2 gr. ad differentiam sinuum 13 & 17 gr. & ita sinus 3 gr. ad differentiam sinuum 12 & 18 gr. atque sic continuo usque dum pervenietur ad sinum 30 gr.

Similiter ut Radius ad duplum cosinus 30 gr. seu ad duplum sinus 60 gr. ita sinus 1 gr. ad differentiam sinuum 29 & 31 gr. : : sin 2 gr. ad Differentiam sinuum 28 & 32 gr. : : sin 3 gr. ad differentiam sinuum 27 & 33 gr. sed in hoc casu est Radius ad duplum cosinus 30 gr. ut 1 ad $\sqrt{3}$. ac proinde si multiplicentur sinus distantiarum ab arcu 30 gr. per $\sqrt{3}$ dabuntur differentiæ sinuum.

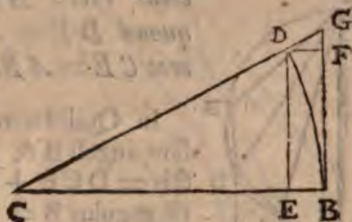
Similiter in ipso initio quadrantis minutim exquirere possumus sinus, datis sinubus & cosinubus unius & duorum minutorum. Nam ut Radius ad duplum cosinus 2′ : : sin 1′ : differentiam sinuum 1′ & 3′ : Sin 2′ : differentiam sinuum 0′ & 4′ hoc est, ad ipsum sinum 4′. Et similiter ex datis sinubus priorum 4′ inveniuntur sinus reliqui usque ad 8′ & exinde ad 16′ & ita deinceps.

PROP.

PROP. VII. THEOREMA.

In arcubus exiguis ſinus & Tangens ejuſdem arcus ſunt quam proxime ad ſe invicem, in ratione æqualitatis.

Nam ob æquiangula triangula CEDCBG, erit CE: CB :: ED : BG. ſed accedente puncto D ad B, evaneſcit EB reſpectu arcus BD: unde fit CE fere æqualis CB. adeoque & ED fere æqualis BG. Si EB ſit minor radii parte $\frac{1}{10\,000\,000}$ erit differentia inter ſinum & tangentem, minor quoque tangentis parte $\frac{1}{10\,000\,000}$.



Cor. Cum Arcus ſit tangente minor, ſinu autem ſuo major; & exigui arcus ſinus & tangens ſunt fere æquales, erit etiam arcus ſuo ſinui vel tangenti fere æqualis, Adeoque in exiguis arcubus, erit ut arcus ad arcum ita ſinus ad ſinum.

PROP. VIII.

Invenire ſinum Arcus unius minuti.

Latus Hexagoni circulo inſcripti, hoc eſt, ſubtenſa 60 graduum æqualis eſt Radio, (*per* 15^{tam} 4^{ti}.) Radii itaque ſemiſſis erit ſinus Arcus 30 gr. Dato itaque ſinu Arcus 30 grad. invenitur ſinus arcus 15 gr., (*per* 3^{tiam} hujus.) Item ex dato ſinu 15 gr. per eandem invenitur ſinus 7 gr. 30 min. & ſinus hujus dimidii 3 gr. 45′ ſimiliter invenitur; & ita deinceps, donec duodecima peracta biſectione, perveniatur ad arcum 52″ 44‴ 3⁗ 45′′′′′ cujus coſinus fere æqualis eſt radio, in quo caſu (uti conſtat ex prop. 7.) ſunt ſinus arcubus ſuis proportionales; adeoque ut arcus 52″ 44‴. 3⁗. 45′′′′′ ad arcum unius minuti ita erit

erit ſinus prius inventus ad ſinum arcus unius minuti, qui igitur dabitur.

Dato ſinu unius minuti, invenietur per prop. 2 & 4, ſinus duorum minutorum ejuſque coſinus.

PROP. IX THEOREMA.

Si angulus B A C in peripheria circuli exiſtens, biſecetur rectâ A D, Et producatur A C quoad D E = A D ipſi occurrat in E: erit C E = A B.



In Qudrilatero A B C D (per 22. 3.) ſunt anguli B & A C D æquales duobus rectis = D C E + D C A (per 13. 1.) unde erit angulus B = D C E. Quin etiam eſt angulus E = D A C (per 5. 1.) = D A B & eſt D C = D B. quare Triangula B A D & C E D ſunt congrua & C E eſt æqualis A B. Q. E. D.

PROP. X THEOREMA.

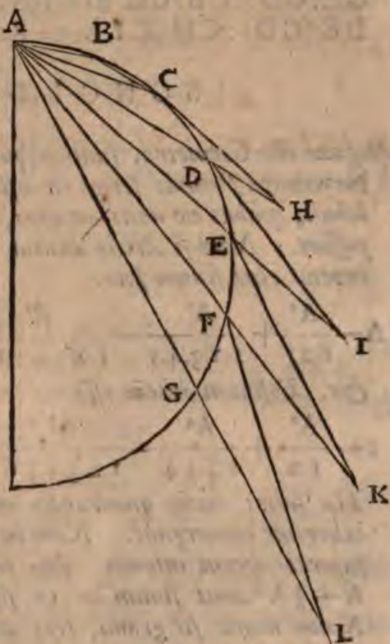
Sint arcus A B B C C D D E E F &c. æquales; Arcuumque A B A C A D A E &c. ſubtenſæ ducantur, erit A B : A C :: A C : A B + A D :: A D : A C + A E :: A E : A D + A F : A F : A E + A G.

Producantur A D in H, A E in I, A F in K, & A G in L, ut triangula A C H A D I A E K A F L ſint Iſoſcelia. Et quoniam angulus B A D biſectus eſt, fiet D H = A B per precedentem. Similiter erit E I = A C, F K = A D, item G L = A E.

Sed Triangula Iſoſcelia A B C C A H D A I E A K F A L, ob angulos ad baſes æquales, ſunt æquiangula. Quare erit ut A B : A C : : A C : A H = A B + A D :: A D : A I = A C + A E :: A E : A K = A D + A F :: A F : A L = A E + A G. Q. E. D.

Corol.

Corol. Quoniam eſt AB ad AC ut Radius ad duplum coſinus Arcus $\frac{1}{2}$ AB, (per corol. prop. 4.) erit quoque ut Radius ad duplum coſinus arcus $\frac{1}{2}$ AB ita $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ AC :: $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ AD :: $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ AE :: $\frac{1}{2}$ AE : $\frac{1}{2}$ AD + $\frac{1}{2}$ AF &c. Sint jam arcus AB BC CD &c. ſinguli 2'. Erit $\frac{1}{2}$ AB ſinus unius minuti, $\frac{1}{2}$ AC ſinus 2'. $\frac{1}{2}$ AD ſinus 3' $\frac{1}{2}$ AF ſinus 4' &c. Unde datis ſinubus unius & duorum minutorum ſinus omnes reliqui ſic facillime habentur.



Dicatur coſinus arcus unius minuti, hoc eſt, ſinus arcus 89 gr. 59' Q & fient ſequentes Analogiæ, R : 2 Q :: Sin 2' : S 1' + S 3'. quare dabitur ſinus 3'. Item R : 2 Q :: S. 3' : S. 2' + S. 4'. quare dabitur S 4'.

Item R : 2 Q :: S. 4' : S. 3' + S. 5'. quare habetur ſinus 5'.

R : 2 Q :: S. 5' : S 4' + S 6' proinde dabitur S 6'. Atque ita deinceps ad ſingula quadrantis minuta dabuntur ſinus. Et quoniam Radius ſeu primus Analogiæ terminus eſt Unitas; operationes per multiplicationem contractam & ſubductionem facillime expediuntur.

Inventis ſinubus, uſque ad gradum ſexageſimum. Reliqui ſinus per ſolam additionem habentur (per cor. 2. pr. 6.)

Datis ſinubus, Tangentes & ſecantes ex Analogiis ſequentibus inveniri poſſunt. (In fig. Definitionum) ob æquiangula Triangula CED CBG CHI.

CE:

CE:ED::CB:BG. hoc eſt, coS:S::R:T.
GB:BC::CH:HI. h. e. T:R::R:coT.
CE:CD::CB:CG. h. e. coS:R::R:Secant.
DE:CD::CH:CI. h. e. S:R::R:co Secant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, ſummuſque Philoſophus Dominus Newtonus *Primus ſeries in infinitum convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum ſinus computari poſſint. Nam ſi Arcus dicatur* A *& Radius ſit unitas invenit ejus ſinum fore.*

$$A - \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

&c. Coſinum autem eſſe

$$1 - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \text{ \&c.}$$

Hæ ſeries initio quadrantis cum Arcus A *parvus eſt celerrime convergunt. Nam in ſerie pro ſinu, ſi* A *non ſuperet decem minuta, duo primi ejus termini ſcil.* $A - \frac{1}{6}A^3$ *dant ſinum ad* 15 *figurarum loca, ſi Arcus* A *non major ſit gradu, tres primi exhibent ſinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis ſinubus hæ ſeries ſunt admodum utiles. ſed quo major ſit arcus* A, *eo pluribus opus eſt terminis ut inveniatur ſinus in numeris qui ſunt veri ad datum figurarum locum. Tandem autem lentiſſime convergunt ſeries cum Arcus fere æqualis eſt Radio. Cui rei ut remedium adferatur, ego alias excogitavi ſeries* Newtonianis *ſimiles, in quibus ſuppono arcum cujus ſinus quæritur eſſe ſummam vel differentiam duorum arcuum ſcil. eſſe* A + z *vel* A − z: *notoſque eſſe ſinum & coſinum arcus* A. *ſcil. ſit* a *ſinus arcus* A *&* b *ejus coſinus. Sinus Arcus* A + z *per hanc ſeriem exprimetur*

$$1\ a + \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} \text{ \&c.}$$

Ejus

2. *Ejus Cosinus* $b - \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} + \frac{az^3}{1.2.3.} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5} - \frac{bz^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Similiter sinus Arcus A — z *est*

3. $a - \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} + \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} - \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Et cosinus est

4. $b + \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2.} - \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{az^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

Arcus A *est medius Arithmeticus inter arcus* A — z & A + z. *Differentiæ sinuum sunt*

5. $\frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

6. $\frac{bz}{1} + \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} - \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} + \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Unde differentiarum differentia seu differentia secunda

7. *Prodit* $\frac{2az^2}{1.2} - \frac{2az^4}{1.2.3.4} + \frac{2az^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Seu $\frac{2a \times z^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c.

Quæ series æqualis est duplo sinus arcus medii ducto in sinum versum arcus z *& celerrime convergit. Adeo ut si* z *sit minutum primum, terminus seriei primus dat differentiam secundam ad* 15 *figurarum loca; secundus autem terminus ad* 25 *loca.*

Hinc datis sinubus duorum quorumvis arcuum intervallo minuti distantium, facili admodum operatione inveniri possint sinus reliquorum omnium arcuum qui sunt in eadem progressione.

In

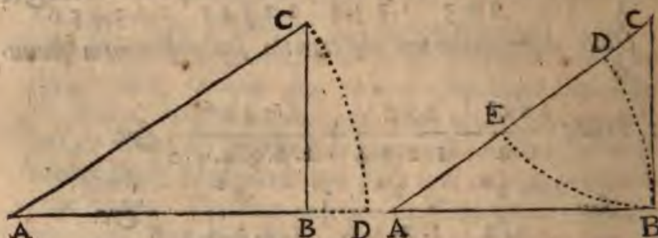
In ſerie prima & ſecunda ſi Arcus A *ſit* = o, *erit* a = o & b *ejus coſinus fit radius ſeu* 1. & *hinc deſtructis terminis ubi eſt* a & *pro* b *poſito* 1 *ſeries deveniunt* Newtonianæ. *In ſerie tertia & quarta. ſi* A *ſit* 90 *gr. fiet* b = o & a = 1 *unde quoque deſtructis terminis ubi eſt* b & *pro* a *poſito* 1 *rurſus prodibunt ſeries* Newtonianæ.

Omnes hæ ſeries ex Newtonianis *facile fluunt per prop.* 5. *hujus.*

PROP. XI.

In Triangulo Rectangulo, ſi Hypotenuſa ſit Radius, latera ſunt ſinus angulorum oppoſitorum; ſi vero crus alterum fiat Radius, crus reliquum eſt Tangens anguli oppoſiti, & Hypotenuſa eſt anguli ſecans.

Manifeſtum eſt C B eſſe ſinum arcus C D, ejuſque coſinum eſſe A B, ſed arcus C D eſt menſura anguli A, & complementum menſuræ anguli C. Præterea in ſecunda figura poſito A B radio, eſt B C, Tangens & A C ſecans ar-



cus B D, qui eſt menſura anguli A, & ſimiliter in eadem figura poſito B C radio, eſt B A Tangens & A C ſecans arcus B E vel anguli C. Q. E. D.

Eſt igitur, ut A C ſecundum datam quamvis menſuram æſtimata ad B C in eadem menſura æſtimatam, ita erit 10000000 numerus partium in quas dividi ſupponitur Radius, ad numerum qui exprimit in iiſdem partibus longitudinem quam habet ſinus anguli A, hoc eſt,

Erit

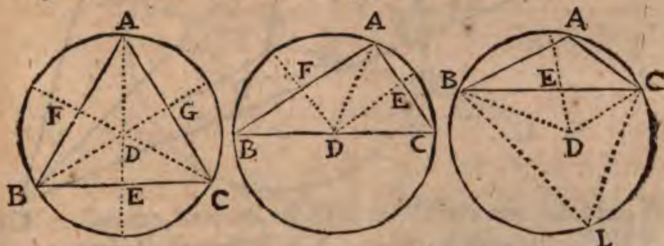
Erit AC : BC : : R : S, A
Simili ratione erit AC : BA : : R : S, C
Item AB : BC : : R : T, A
Et BC : BA : : R : T, C

In his itaque proportionalibus si dantur tres quælibet, per Regulam Trium invenietur quarta.

PROP. XII.

Trianguli plani latera sunt ut sinus angulorum oppositorum.

Trianguli circulo inscripti latera perpendicularibus radiis bisecentur. Et erunt semilatera sinus angulorum ad peripheriam. Est enim angulus BDC ad centrum du-



plex anguli BAC ad peripheriam (per 20. El. 3.) cujus itaque dimidium sc. BDE æquale est BAC, atque ejus sinus est BE. Eadem ratione erit BF sinus anguli BCA. Et AG erit sinus anguli ABC.

In Triangulo rectangulo est BD $= \frac{1}{2}$ BC $=$ Radio (per 31. El. 3.) sed Radius est sinus anguli recti unde $\frac{1}{2}$ BC est sinus anguli A.

In Triangulo Amblygonio, ductis BL CL, erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (per 22. El. 3.) ac proinde idem erit utriusque anguli sinus. Est autem BDE (cujus sinus est BE) $=$ angulo L. quare erit & BE sinus anguli BAC. Sunt itaque in omni triangulo semisses laterum sinus angulorum oppositorum, manifestum autem est latera esse inter se ut ipsorum semisses. Q. E. D.

PROP.

CE:ED::CB:BG. hoc est, coS:S::R:T.
GB:BC::CH:HI. h. e. T:R::R:coT.
CE:CD::CB:CG. h. e. coS:R::R:Secant.
DE:CD::CH:CI. h. e. S:R::R:co Secant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, summusque Philosophus Dominus Newtonus *Primus series in infinitum convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum sinus computari possint. Nam si Arcus dicatur* A *& Radius sit unitas invenit ejus sinum fore.*

$$A-\frac{A^3}{1.23}+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}-\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{A^9}{1.2.3.4\,5.6.7.8.9}$$

&c. Cosinum autem esse

$$1-\frac{A^2}{1.2}+\frac{A^4}{1.2.3.4}-\frac{A^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}\ \&c.$$

Hæ series initio quadrantis cum Arcus A *parvus est celerrime convergunt. Nam in serie pro sinu, si* A *non superet decem minuta, duo primi ejus termini scil.* $A-\frac{1}{6}A^3$ *dant sinum ad* 15 *figurarum loca, si Arcus* A *non major sit gradu, tres primi exhibent sinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis sinubus hæ series sunt admodum utiles. sed quo major sit arcus* A, *eo pluribus opus est terminis ut inveniatur sinus in numeris qui sunt veri ad datum figurarum locum. Tandem autem lentissime convergunt series cum Arcus fere æqualis est Radio. Cui rei ut remedium adferatur, ego alias excogitavi series* Newtonianis *similes, in quibus suppono arcum cujus sinus quæritur esse summam vel differentiam duorum arcuum scil. esse* A + z *vel* A — z: *notosque esse sinum & cosinum arcus* A. *scil. sit* a *sinus arcus* A *&* b *ejus cosinus. Sinus Arcus* A + z *per hanc seriem exprimetur*

1 $$a+\frac{bz}{1}-\frac{az^2}{1.2}-\frac{bz^3}{1.2.3}+\frac{az^4}{1.2.3.4}+\frac{bz^5}{1.2.3.4.5}\ \&c.$$

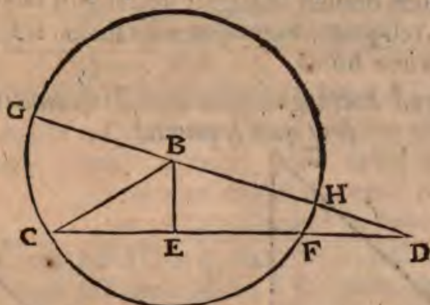
Ejus

angulorum ad Basim, ad E D Tangentem semissis differentiæ eorundem. Q. E. D.

PROP. XIV.

In Triangulo Plano, Basis, summa laterum, Differentia laterum, Differentia segmentorum basis sunt proportionales.

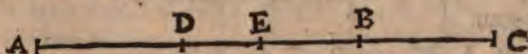
Trianguli BCD basis esto DC, centro B radio BC describatur circulus, & producatur DB in G, ex puncto B in basin cadat perpendicularis BE, erit DG = DB +



BC = summæ laterum, & DH = differentiæ laterum, & segmenta basis sunt DE CE quorum differentia est DF. Quoniam (per cor. prop. 37. El. 3.) rectangulum sub DC DF æquale est rectangulo sub DG DH, erit (per 16. El. 6.) DC : DG :: DH : DF.

PROBLEMA.

Datis duarum quarumvis quantitatum summa & differentia, ipsas quantitates invenire.



Si ad semisummam addatur semidifferentia, aggregatum erit æquale majori; si autem à semisummâ subducatur semidifferentia, residuum erit æquale minori. Sint enim AB BC duæ quantitates; & capiatur AD = BC. Fiet DB differentia. Quarum summa est AC, quæ bisecta in

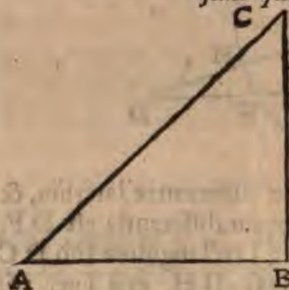
E dat AE vel EC ſemiſummam & DE vel EB ſemidifferentiam. Porro eſt AB = AE + EB = ſemiſummæ + ſemidifferentia, & BC = CE — EB = ſemiſummæ — ſemidifferentia.

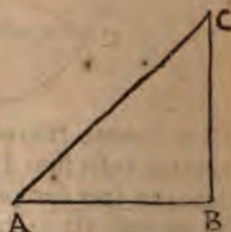
In quovis Triangulo plano datis duobus angulis, datur tertius qui eſt ſummæ duorum reliquorum complementum ad duos rectos.

In Triangulo autem rectangulo dato alterutro angulo acuto, datur reliquus, qui eſt dati complementum ad rectum.

Datis autem duobus trianguli rectanguli lateribus, ut inveniatur reliquum non opus eſt canone ſed perficitur ope prop. primæ hujus.

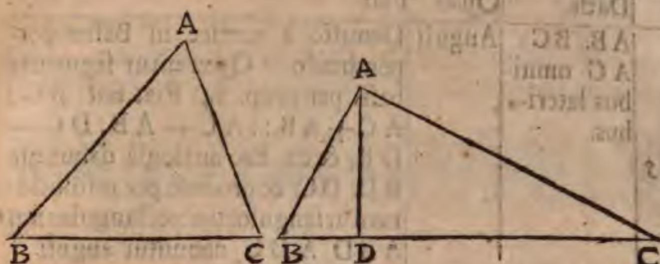
Trianguli Rectanguli ſolutiones Trigonometricæ ſunt quæ ſequuntur.





	Datis.	Quær.	Fiat.
1	AB BC cruribus,	Anguli	AB:BC::R:T anguli A. Cujus complementum eſt Angulus C.
2	AB AC crure & Hypoten.	Anguli	AC:AB::R:S, C cujus complementum eſt angulus A.
3	AB & A crure & angulo.	BC crus alterum	R : T,A : : AB : BC.
4	AB & C crure & angulo.	AC Hypotenuſa.	S, C : R : : AB : AC.

In



In Triangulis obliquangulis.			
	Datis.	Quær.	Fiat.
1	A. B. C & A B angulis & latere.	B C & A C latera.	S,C:S,A::AB:BC. Item S,C:S,B::AB : AC; datis duobus angulis datur tertius, unde casus cum dentur duo anguli & latus; reliqua quærantur, recidit in hunc casum.
2	A.B.C. omnibus angulis.	AB.AC. BC omnia latera.	S, C : S,A : : A B : B C. Et S, C : S,B : : A B : A C. unde datis angulis invenire licet proportiones laterum, at non ipsa latera, nisi ipsorum unum prius innotescat.
3	AB:BC,&C duobus lateribus & angulo uni opposito.	A & B anguli.	A B : B C : S, C : S, A, qui proinde inveniatur. Sed quia idem est sinus anguli & ejus complementi ad duos rectos, prænoscenda est anguli A Species.
4	A B B C & B. lateribus duobus & angulo interjecto.	Anguli. A & C.	$BC + AB : BC - AB :: \frac{T,A+C}{2} : \frac{T,A-C}{2}$ unde datur differentia angulorum A & C quorum summa quoque est nota; & proinde per *Problema post prop.* 14. dabuntur ipsi anguli.

	Datis.	Quær.	Fiat.
5	AB. BC AC omnibus lateribus.	Anguli	Demisso à vertice in Basim perpendiculo. Quærantur segmenta basis per prop. 14. Fiat scil. BC : AC + AB :: AC − AB : DC − DB, & ex hac analogia dabuntur BD. DC. & proinde per resolutionem triangulorum rectangulorum ABD ADC dabuntur anguli.

TRIGONOMETRIÆ

Sphæricæ

ELEMENTA.

DEFINITIONES.

1. SPhæræ Poli, ſunt duo puncta in ſuperficie Sphæricâ, quæ ſunt Axis extrema.

2. Polus circuli in Sphæra, eſt punctum in ſuperficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes, ſunt inter ſe æquales.

3. Circulus in ſphæra maximus eſt, cujus planum tranſit per ſphæræ centrum, & cujus centrum idem eſt cum centro Sphæræ.

4. Triangulum Sphæricum eſt figura comprehenſa ſub arcubus trium maximorum in Sphæra circulorum.

5. Angulus Sphæricus eſt is qui in ſuperficie ſphæricâ, continetur ſub duobus arcubus maximorum circulorum; qui æqualis eſt inclinationi planorum iſtorum circulorum.

PROP. I.

Circuli maximi ACB AFB ſe bifariam ſecant.



Cum enim circuli habent idem centrum, communis eorum ſectio erit utriuſque circuli dtameter, quæ eos bifariam ſecabit.

Cor. Hinc in ſuperficie ſphæræ, duo maximorum circulorum Arcus ſemicirculis minores, ſpatium non comprehendunt, non enim poſſunt, niſi in duobus punctis ſemicirculo oppoſitis, ſibi invicem occurrere.

PROP. II.

Si à polo C circuli cujuſvis AFB, ducatur ad ejus centrum recta CD, ea ad planum iſtius circuli perpendicularis erit.

In circulo AFB ducantur diametri quævis EF GH; Et quoniam in triangulis CDF CDE, ſunt CD DF æquales CD DE, & baſis CF æqualis baſi CE (per def. 2.) erit (per 8. El. 1.) angulus CDF = angulo CDE; ac proinde uterque rectus erit, ſimiliter demonſtrabitur, angulos

angulos CDG CDH esse rectos; unde (per 4. El. 11.) erit CD perpendicularis ad planum circuli AFE. Q.E.D.

Cor. 1. Circulus maximus distat à polo suo intervallo Quadrantis; nam ob angulos CDG CDF rectos, erunt ipsorum mensuræ, sc. arcus CG CF quadrantes.

Cor. 2. Circuli maximi per polum alterius circuli transeuntes cum ipso faciunt angulos rectos; & vicissim, si cum altero circulo faciunt angulos rectos; transibunt per polum alterius istius circuli; nam per rectam DC eos transire necesse est.

PROP. III.

Si polo A describatur maximus circulus ECF, arcus CF interceptus inter AC AF, est mensura anguli CAF vel CDF.

Per *corol.* 1. præcedentis, sunt arcus AC AF quadrantes, ac proinde anguli ADC ADF sunt recti, quare (per defin. 6. El. 11.) angulus CDF (cujus mensura est arcus CF) æqualis est inclinationi planorum ACB AFB, æqualis quoque angulô Sphærico CAF vel CBF. Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus AC AF sunt Quadrantes, erit A polus circuli per puncta C & F transeuntis, est enim AD ad planum FDC normalis, (per 4. El. 11.)

Cor. 2. Anguli ad verticem sunt æquales, uterque enim est æqualis inclinationi circulorum. Item anguli qui sunt deinceps sunt æquales duobus rectis.

PROP. IV.

Triangula erunt æqualia & congrua, si duo latera habeant duobus lateribus æqualia, & angulos æqualibus lateribus comprehensos etiam æquales.

PROP. IV.

Item Triangula erunt æqualia & congrua, si latus cum angulis adjacentibus in uno triangulo sit æquale lateri cum angulis adjacentibus in altero triangulo.

PROP. VI.

Triangula æquilatera ſunt etiam æquiangula.

PROP. VII.

In Triangulis Iſoſcelibus, anguli ad baſim ſunt æquales.

PROP. VIII.

Si anguli ad baſim fuerint æquales, erit Triangulum Iſoſceles.

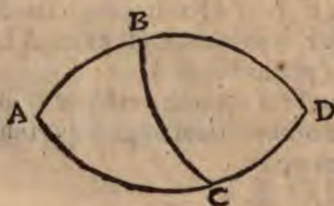
Eodem modo demonſtrantur quinque propoſitiones præcedentes ut in triangulis planis.

PROP. IX.

Quælibet duo trianguli latera reliquo ſunt majora.

Nam arcus circuli maximi, inter duo quælibet in ſuperficie ſphæræ puncta, eſt via breviſſima.

PROP. X.



Quodlibet trianguli latus minus eſt ſemicirculo.

Producantur tranguli A B C latera A C A B, donec conveniunt in D, erit arcus A C D ſemicirculus, qui major eſt quam A C.

PROP. XI.

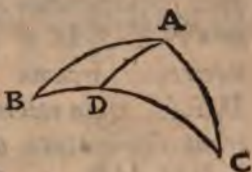
Trianguli latera ſunt circulo minora.

Eſt enim D B + D C major quam B C, (per prop. 9.) & utrinque addendo B A + A C, erit D B A + D C A, hoc eſt, circulus major quam A B + B C + A C, quæ ſunt tria latera trianguli A B C.

PROP.

PROP. XII.

In triangulo ABC, major angulus A majori lateri ſubtenditur.



Fiat angulus BAD = angulo B, & erit AD = BD (per 8. hujus) unde BDC = DA + DC, & hi arcus majores ſunt quam AC, eſt itaque latus BC, quod ſubtendit angulum BAC, majus quam AC, quod ſubtendit angulum B.

PROP. XIII.

In quolibet triangulo ABC, ſi ſumma Crurum AB BC ſit major æqualis vel minor ſemicirculo; internus angulus ad baſim AC erit major æqualis aut minor externo & oppoſito BCD, ideoque ſumma angulorum A & ACB major erit, aut æqualis, aut minor duobus rectis.

Vide Fig. Prop. 10.

Sit primò AB + BC = ſemicirculo = AD, erit BC = BD; & anguli BCD & D æquales, (per 7 hujus) unde & angulus BCD erit = angulo A.

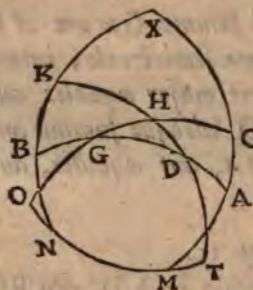
Sit ſecundò AB + BC majores quam ABD, erit BC major quam BD; unde & angulus D, hoc eſt angulus A) major erit angulo BCD. (per 12. hujus) Similiter oſtendetur, ſi AB + BC ſint ſimul minores ſemicirculo, fore angulum A minorem angulo BCD. & quoniam anguli BCD & BCA ſunt = duobus rectis; ſi angulus A ſit major BCD, erit A & BCA majores duobus rectis. Si A ſit = BCD erit A & BCA æquales duobus rectis. Si vero A ſit minor quam BCD, erunt A & BCA minores duobus rectis. Q. E. D.

PROP.

PROP. XIV.

In quolibet triangulo G H D, laterum poli, ductis circulis maximis, constituunt aliud triangulum XMN, quod supplementum est trianguli G H D; nempe latera N X X M & N M erunt supplementa ad semicirculos arcuum qui sunt mensuræ angulorum D,G,H. Quin etiam mensuræ angulorum M, X, N, erunt supplementa ad semicirculos, laterum G H G D & H D.

Polis G, H, D, describantur maximi circuli X C A M T M N O X K B N. Et quia G est polus circuli X C A M, erit G M = Quadranti, (per cor. 1. prop. 2.) & ob H polum circuli T M O, erit H M quoque Quadrans; Quare (per corol. 1. prop. 3.) erit M polus circuli G H. Similiter quia D est polus circuli X B N, & H polus circuli T M N, erunt arcus D N H N Quadrantes; ac proinde (per cor. 1. prop. 3.) N erit polus circuli H D. Et eadem ratione, ob G X D X quadrantes, erit X polus circuli G D. Hisce præmissis.



Quoniam est N K = Quadranti, (cor. 1. prop. 2.) & X B = Quadranti, erunt N K + X B hoc est N X + K B = duobus Quadrantibus seu semicirculo; adeoque est N X supplementum arcus K B seu mensuræ anguli H D G ad semicirculum. Similiter quia est M C = Quadranti, & X A = Quadranti; erunt M C + X A, hoc est, X M + A C = duobus quadrantibus seu semicirculo, & proinde X M est supplementum arcûs A C qui est mensura anguli H G D. Quinetiam, ob M O, N T Quadrantes, erunt M O + N T = O T + N M = semicirculo. itaque est N M supplementum ad semicirculum arcûs O T seu mensuræ anguli G H D. Q E. D.

Præterea

Præterea quia DK HT sunt quadrantes, erunt DK +HT seu KT+HD æquales duobus quadrantibus, seu semicirculo. Est ergo KT, seu mensura anguli XNM, supplementum lateris HD ad semicirculum. Nec dissimili methodo ostendetur OC mensuram anguli XMN esse supplementum lateris GH. Et BA mensuram anguli X esse supplementum lateris GD. Q. E. D.

PROP. XV.

Triangula æquiangula sunt etiam æquilatera.

Nam eorum supplementa sunt æquilatera, (per 14. hujus) ergo & æquiangula, quare & ipsa sunt æquilatera, per prop. 14. partem secundam.

PROP. XVI.

Trianguli tres anguli sunt majores duobus rectis, & minores sex rectis.

Vide Fig. Prop. 14.

Nam tres mensuræ angulorum G, H, D, una cum tribus lateribus trianguli XNM faciunt tres semicirculos, (per 14. hujus) sed tria latera trianguli XNM minora sunt duobus semicirculis, (per 11. hujus) quare tres mensuræ angulorum GHD majores sunt semicirculo, & proinde anguli GHD majores erunt duobus rectis.

Propositionis secunda pars patet, nam in quolibet triangulo, externi & interni anguli simul tantum faciunt sex rectos, unde interni sunt minores quam sex recti.

PROP. XVII.

Si à puncto R quod circuli AFBE polus non est, in circumferentiam cadant arcus maximorum circulorum RA RB RG RV, maximus est RA, qui per ejus polum C incedit; reliquus vero minimus, cæteri prout à maximo recedunt minores sunt, faciuntque

que cum priore circulo AFB angulum obtusum ex parte maximi arcus.

Vide Fig. Prop. 1.

Quia C eſt polus circuli A F B, erunt C D & huic parallela R S perpendiculares ad planum A F B; Ductis autem S A S G S V; erit (per 7. El. 3.) S A major quam S G, & S G major quam S V. unde in Triangulis rectangulis planis R S A R S G R S V, erunt R S q + S A q ſeu R A q majora quam R S q + S G q ſeu R G q, & proinde R A major erit R G; & arcus R A major arcu R G. Similiter erunt R S q + S G q ſeu R G q majora quam R S q + S V q ſeu R V q; & proinde R G major R V, & arcus R G major arcu R V.

2*do.* Eſt angulus R G A major angulo C G A qui rectus eſt, (per corol. prop. 3.) Et angulus R V A major angulo C V A qui quoque rectus eſt, quare anguli R G A R V A ſunt obtuſi.

PROP. XVIII.

In triangulo rectangulo ad A, crura angulum rectum continentia ſunt ejuſdem affectionis cum augulis oppoſitis, hoc eſt, ſi crura ſint majora aut minora Qudrantibus, anguli illis oppoſiti erunt majores aut minores rectis angulis: Vide Fig. prop. primæ.

Nam ſi A C ſit Quadrans, C erit polus circuli A F B, & anguli A G C vel A V C erunt recti. Si crus A R ſit majus quadrante, erit angulus A G R major recto (per 17. hujus.) Si crus ſit minus quadrante ut A X, angulus A G X erit minor recto.

PROP. XIX.

Si duo crura trianguli rectanguli (& conſequenter anguli) ſint ejuſdem affectionis, id eſt, utrumque vel

majus vel minus Quadrante, hypotenusa erit minus quadrante.

Vide Fig. Prop. 1.

In triangulo A R V vel B R V, sit F polus cruris A R, & erit R F quadrans, qui major est quam R V (per 17. hujus.)

PROP. XX.

Si sint diversæ affectionis, hypotenusa erit major Quadrante.

Nam in triangulo A R G, est R G major quam R F qui est quadrans.

PROP. XXI.

Si Hypotenusa sit major vel minor quadrante, crura anguli recti, ideoque & anguli oppositi sunt ejusdem aut diversæ affectionis.

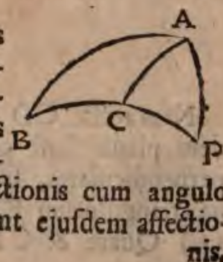
Hæc propositio est priorum conversa; & facile ex iisdem sequitur.

PROP. XXII.

In quovis triangnlo A B C, si anguli B & C ad basim sunt ejusdem affectionis, perpendicularis A P cadet intra triangulum; si sint diversæ affectionis, perpendicularis cadet extra triangulum.



In primo casu si perpendicularis non cadat intra, cadat extra triangulum, (ut in fig. 2.) Tum in triangulo A B P, est A P ejusdem affectionis cum angulo B; & similiter in triangulo A C P, est A P ejusdem affectionis cum angulo A C P; ergo cum A B C & A C P sunt ejusdem affectionis,



nis, erunt anguli ABC & ACB diverſæ affectionis; quod eſt contra hypotheſim.

In 2*do* Caſu ſi perpendicularis non cadat extra, cadet intra, (in fig. 1.) Et in triangulo ABP, eſt angulus B ejuſdem affectionis cum crure AP, & ſimiliter in triangulo ACP eſt angulus C ejuſdem affectionis cum AP, unde anguli B & C ſunt ejuſdem affectionis, quod eſt contra hypotheſim

PROP. XXIII.

In Triangulis BAC BHE rectangulis ad A & H, ſi idem fuerit angulus acutus B ad baſim BA vel BH, Sinus hypotenuſarum erunt ſinubus arcuum perpendicularium proportionales.



Nam rectæ CD EF perpendiculariter inſiſtentes eidem plano ſunt parallelæ. Item FR DP radio OP perpendiculares, ſunt quoque parallelæ; unde & plana triangulorum EFR CDP ſunt parallela (per 15. El. 11.) Quare & CP ER horum planorum communes

ſectiones

ſectiones cum plano per B E C O tranſeunte parallelæ erunt (per 16. El. 11.) Triangula igitur C D P E F R æquiangula erunt. Quare C P ſinus Hypotenuſæ B C eſt ad C D ſinum arcus perpendicularis C A; ut E R ſinus hypotenuſæ B E eſt ad E F ſinum arcus perpendicularis E H. Q. E. D.

PROP. XXIV.

Iiſdem poſitis, A Q H K ſinus baſium, tangentibus I A G H arcuum perpendicularium, ſunt proportionales.

Nam ſimiliter ut in præcedente propoſitione, oſtendetur triangula Q A I K H G eſſe æquiangula; unde Q A: A I :: K H : H G.

PROP. XXV.

In Triangulo A B C rectangulo ad A. Ut coſinus anguli B exiſtentis ad Baſim B A ad ſinum anguli verticalis A C B, ita coſinus arcus perpendicularis ad Radium.

Præparatio. Producantur latera B A B C C A ita ut B E B F C I C H ſint Quadrantes, polis B & C ducantur circuli maximi E F D G I H G. & erunt anguli ad E, F, I & H recti. Quare D eſt polus B A E (per cor. 2 pr. 2 hujus) & G polus I F C B, erit etiam A E = complemento arcûs B A. Item F E menſura anguli B = G D, & D F eorum complementum. erit quoque B C = F I = menſuræ anguli G, & C F eorum complementum. Item eſt C A = H D, & D C utriuſque complementum. Hiſce præmiſſis, in triangulis H I C D C F rectangulis ad I & F & habentibus eundem angulum



gulum C acutum, ob B A minorem quadrante, erit S,DF: S,HI::S,DC:S,HC id eſt, coſinus anguli B eſt ad ſinum anguli verticalis B C A ut coſinus C A ad Radium Q. E. D.

PROP. XXVI.

Coſinus baſis : coſin. Hypotenuſæ :: R : coS perpendicularis.

Nam in Triangulis A E D C F D rectangulis ad E & F; habentibus eundem angulum D acutum : ob A E quadrante minorem, eſt S, E A : S, C F :: S, D A : S, D C. Q. E. D.

PROP. XXVII.

S, Baſeos : R :: T, perpendicularis : T, anguli ad baſim.

Nam in Triangulis B A C B E F rectangulis ad A & E & habentibus eundem angulum B acutum, ob A C minorem quadrante, S, B A : S, B E :: T, A C : T, E F. Q. E. D.

PROP. XXVIII.

CoS, anguli verticalis : R :: T, perpendicularis : T, Hypotenuſæ.

In Triangulis G I F G H D rectangulis ad I & H, & habentibus eundem angulum G acutum, ob H D minorem H C ſeu quadrante, eſt S, G H : S, G I :: T, H D : T, I F.

PROP. XXIX.

S, Hypotenuſæ : R :: S, perpendicularis : S, anguli ad baſim.

In Triangulis præcedentibus, eſt S, I F : S, G F :: S. H D : S, G D.

PROP.

PROP. XXX.

Radius : coS. Hypotenusæ : : T, anguli verticalis : coT, anguli ad basim.

In Triangulis HIC DFC rectangulis ad I & F, & habentibus eundem angulum C acutum, ob DF minorem quadrante, Eſt S, CI : S, CF : : T, HI : T, DF. hoc eſt, R : coS, BC : : Tang, C : coT, anguli B.

Propoſitiones ſex præcedentes ad omnes caſus triangulorum rectangulorum reſolvendos ſufficiunt, ſequuntur illi numero ſedecim cum ſuis analogiis ex hiſce deductis.

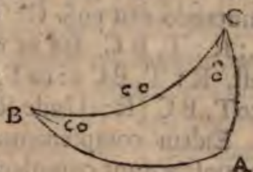
	Datis præter ang. rectum	Quær.		
1	A C & C	B	R : coS, C A : : S, C : coS, B ejuſdem ſpeciei cum C A.	per 25 inverſe
2	A C & C	C	coS, C A : R : : coS, B : S, C ambigui.	per 25
3	B & C	A C	S, C : coS, B : : R : coS, C A ejuſdem ſpeciei cum ang. B.	per 25 & 18
4	B A C A	B C	R : coS, B A : : coS, A C : coS B C. Si B A A C fuerint ejuſdem affectionis nec Quadrantes, erit B C minor quadrante; ſi diverſæ, erit B C quadrante major.	per 26 & 19 20
5	B A B C	A C	coS, B A : R : : coS, B C : coS, C A. Si B C ſit major aut minor quadrante, B A & C A erunt ejuſdem aut diverſæ affectionis, ſed datur B A ejuſque Species, ergo.	per 26 & 21
6	B A C A	B	S, B A : R : : T, C A : T, B ejuſdem affectionis cum latere oppoſito C A.	per 27 & 18
7	B A B	A C	R : S, B A : : T, B : T, A C, ejuſdem ſpeciei cum B.	per 27 & 18

	Datis præter ang. rectum.	Quær.		
8	A C B	B A	T, B : R : : T, C A : S, B A ambigui.	per 27
9	B C C	A C	R : coS, C : : T, B C : T, C A. Si B C sit major aut minor quadrante, anguli C & B sunt ejusdem aut diversæ affectionis, quare data specie ang. B dabitur A C.	per 28 & 21
10	A C C	B C	coS, C : R : : T, A C : T, B C. pro- ut ang. C & A C fuerint ejusdem aut diversæ affectionis, B C erit minor aut major quadrante.	per 18, 19, 20
11	B C A C	C	T, B C : R : : T, C A : coS, C. Si B C fuerit major aut minor Quadrante, C A & B A & proinde anguli C & B erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur species C A, ergo dabitur species anguli C.	per 28 21
12	B C B	A C	R : S, B C : : S, B : S, A C ejusdem speciei cum B.	per 29 & 18
13	A C B	B C	S, B : S, A C : : R : S, B C ambigui.	per 29
14	B C A C	B	S, B C : R : : S, A C : S, B ejusdem speciei cum C A.	per 29
15	B C	B C	T, C : R : : coT, B : coS, B C. pro- ut anguli B & C ejusdem aut diversæ affectionis fuerint, erit B C minor aut major quadrante.	per 30 19 20
16	B C C	B	R : coS, B C : : T, C : coT, B. pro- ut B C fuerit minor aut major quadrante; anguli C & B erunt ejusdem aut diversæ affectionis. Sed datur species anguli C. quare dabitur species anguli B.	per 30 21

De

De Resolutione Triangulorum Rectangulorum Sphæricorum, per quinque partes circulares.

PErpensis Analogiis, quibus Triangula Sphærica Rectangula solvuntur, Dominus *Neperus*, nobilis ille Logarithmorum Inventor, duas excogitavit Regulas memoriâ facile retinendas, quarum ope omnes sedecim casus resolvi possunt; Nam cum in hisce triangulis, præter angulum rectum, sint tria latera & duo anguli, latera angulum rectum comprehendentia, hypotenusa autem & reliquorum angulorum complementa, vocavit *Neperus partes circulares.* Et cum datæ sunt duæ quælibet partes, & quæritur Tertia, Harum trium una, quæ dicitur *pars media*, vel adjacet duobus reliquis partibus, quæ itaque vocantur *extremæ adjacentes*; vel neutri adjacet, in quo casu, dicuntur *extremæ oppositæ*; Sic si complementum anguli B ponatur pars media, Crus AB & complementum Hypotensusæ BC sunt partes extremæ adjacentes; At complementum anguli C, & latus AC sunt extremæ oppositæ. Item posito complemento hypotenusæ BC parte media, complementa angulorum B & C sunt extremæ adjacentes; & AB AC crura sunt extremæ oppositæ. Sic etiam posito crure AB parte media, complementum anguli B, & AC sunt extremæ adjacentes; Nam angulus rectus A non intercipit adjacentiam, quia non est pars circularis. At eidem parti mediæ complementum anguli C & complementum hypotenusæ BC sunt extremæ oppositæ. Hisce præmissis.



REGULA PRIMA.

In Triangulo Rectangulo Sphærico, Rectangulum sub Radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub Tangentibus partium Adjacentium.

REGULA SECUNDA.

Rectangulum ſub radio & ſinu partis mediæ, æquale eſt rectangulo ſub coſinubus partium oppoſitarum.

Utriuſque Regulæ tres ſunt caſus. Nam pars media vel poteſt eſſe complementum anguli B vel C, vel complementum hypotenuſæ B C; vel denique unum ex cruribus ſcil. A B vel A C.

Caſus 1. Sit complementum anguli C pars media. Et erunt A C & complementum hypotenuſæ B C extremæ adjacentes. Per pr. 28. Eſt ut coſinus anguli verticalis C ad Radium, Ita Tangens C A ad Tangentem Hypotenuſæ p C. permutando erit coS. C : T, CA : : R : T, B C. ſed ut notum



eſt, R : T, BC : : coT, B C : R. quare coS, C : T, A C : : coT, BC : R; Unde R x coS, C = T, A C coT, BC.

Eidem complemento anguli C parti mediæ, extremæ oppoſitæ ſunt complementum anguli B & A B, & (per prop. 25.) coSinus anguli C eſt ad ſinum anguli C D F ut coSinus D F ad Radium, eſt vero Sinus C D F = S, A E = coS, B A, & coS, D F = S, E F = S, ang. B. unde erit coS,C : coS, B A : : S, B : R. & R x coS, D = coS. B A x S, B hoc eſt, Radius ductus in ſinum partis mediæ, æquatur rectangulo ſub coſinubus extremarum oppoſitarum.

Caſus 2. Sit complementum hypotenuſæ B C pars media, & complementa angulorum B & C erunt extremæ adjacentes. In triangulo D C F (per prop. 27.) Eſt S, C F : R : T, D F : T, C. unde permutando S, C F : T, D F : : (R : T, C : :) coT, C : R. eſt autem S, CF = coS, B C & T, D F = coT, B. quare eſt R x co S, B C = coT, C x coT, B. hoc eſt, Radius ductus in ſinum partis mediæ æquatur producto

producto ex Tangentibus partium adjacentium extremarum.

Eidem parti mediæ, ſcil. complemento B C, adſunt extremæ oppoſitæ A B A C, & (per prop. 26.) eſt coS, B A : coS, B C : : R : coS, A C. quare erit R x coS, B C = coS, B A x coS, A C.

Caſ. 3. Sit denique A B pars media, & erunt complementum anguli B & A C extremæ adjacentes, (& per pr. 27.) S, A B : R : : T, C A : T B. unde erit S, A B : T, C A : : (R:T,B : :) coT, B : R. adeoque erit R x S, A B = T,C A x coT, B.

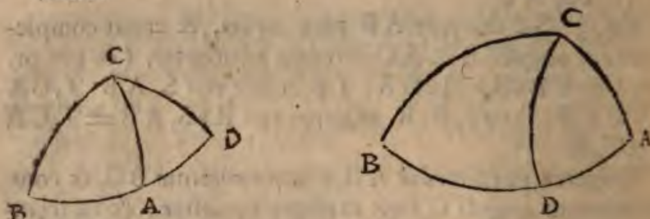
Præterea parti mediæ A B, complementum B C, & complementum anguli C ſunt extremæ oppoſitæ; & in triangulo G H D (per prop. 25.) Eſt coS, D : S, D G H : : coS, G H : R. eſt vero coS, D = coS, A E = S, A B, & S, G = S, I F = S, B C. Item eſt coS, G H = S, H I = S, C. quare erit S, A B : S, B C : : S, C : R. & hinc R x S, A B = S, B C x S, C.

Itaque in omni caſu, rectangulum ſub radio & ſinu partis mediæ æquale erit tam rectangulo ſub coſinubus extremarum oppoſitarum, quam rectangulo ſub tangentibus extremarum adjacentium. Et proinde ſi æquationes illæ reſolvantur in Analogias (per 16. Elem. 6.) ope regulæ Proportionis, partes ignotæ innoteſcent. Et ſi pars quæſita ſit media, primus Analogiæ terminus erit Radius, ſecundum & tertium occupant locum tangentes vel coſinus partium extremarum. Si vero quæratur extremarum una, Analogia incipi debet cum altera, atque Radius ſinuſque partis mediæ, in mediis ponantur locis, ut quartum teneat pars quæſita.

IN Triangulis Sphæricis obliquangulis B C D, demiſſo arcu perpendiculari A C, ab angulo C in baſim B D, (productam ſi opus fuerit,) ut duo fiant Triangula B A C D A C rectangula; eorum ope reſolvi poſſunt plerique caſus Triangulorum obliquangulorum.

PROP. XXXI.

Cosinus angulorum B & D ad basim B D, sinubus angulorum verticalium B C A D C A sunt proportionales.



Nam coS, ang. B : S, B C A :: (coS, C A : R ::) coS, D : S, D C A (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cosinus laterum B C D C sunt proportionales cosinubus basium B A D A.

Est enim coS, B C : coS, B A :: (coS, C A : R ::) coS, D C : coS, D A. (per 26 hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium B A D A, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim B D.

Quia per 27. hujus est, S, B A : R :: T, A C : T, anguli B. Item per eandem, inverse R : S, D A :: T, ang. D : T, A C. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) S, B A : S, D A :: T, ang. D : T, ang. B.

PROP. XXXIV.

Tangentes laterum B C D C sunt in reciproca proportione cosinuum angulorum verticalium B C A, D C A.

Quia per 28. hujus permutaudo, Est

T,BC: R :: T,CA : coS,BCA

& per eandem R : coS,DCA : T,DC: T,CA

quare ex æquo in perturbata ratione est.

T,BC : coS,DCA :: T,DC : coS,BCA.

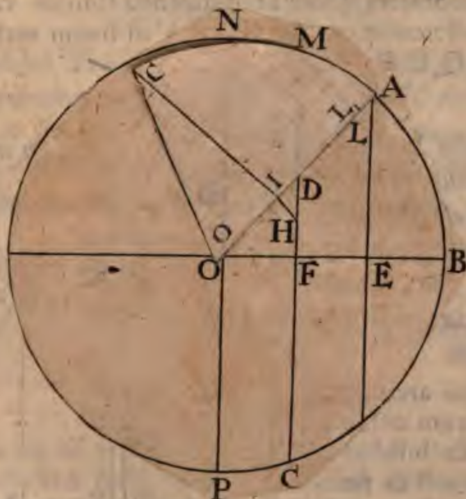
PROP XXXV.

Sinus laterum BC DC sinubus angulorum oppositorum B & D sunt proportionales.

Quia per 29 hnjus S,BC : R :: S,CA : S, ang. B, & per eandem inverse R : S,DC :: S, ang. D : S, CA erit ex æquo in perturbata ratione S,BC : S,DC :: S,D : S,B.

PROP. XXXVI.

In Triangulo quovis Sphærico ABC, CF × AE vel FM × AE, rectangulum sub sinubus crurum BC BA est ad radii quadratum, ut IL seu IA — LA differentia sinuum versorum Basis AC, & differentiæ crurum AM, ad GN sinum versum anguli B.



Polo B describatur circulus maximus PN; sintque BP

BN quadrantes; & PN eſt menſura anguli B; eodem polo B per C deſcribatur circulus minor CFM; horum circulorum plana recta erunt plano BON, (per 2. h.) & PG CH perpendiculares in idem planum, cadent in communes ſectiones ON FM puta in G & H. ducatur HI perpendicularis ad AO, & planum per CH HI perpendiculare erit plano AOB, unde AI perpendicularis ad HI, erit perpendicularis ad rectam CI, (per def. 4. El. 11.) eſt itaque AI ſinus verſus arcus AC, & AL ſinus verſus arcus AM=BM—BA=BC—BA. Triangula Iſoſcelia CFM PON ſunt æquiangula ob MF NO item CF PO parallelas (per 16. El. 11.) quare demiſſis perpendiculis CH PG in latera FM ON, ſimiliter diviſa erunt Triangula; & erit FM : ON :: MH : GN. Itemque ob triangula AOE DIH DLM æquiangula erit AE : AO :: IL : MH
at oſtenſum eſt, eſſe FM : ON :: MH : GN quare erit AE x FM ad AO x ON ut IL x MH, ad MH x GN ſeu ut IL ad GN. hoc eſt rectangulum ſub ſinubus crurum eſt ad quadratum Radii ut differentia ſinuum verſorum baſis & differentiæ crurum BC BA ad ſinum verſum anguli B. Q. E. D.

PROP. XXXVII.

Differentia Sinuum verſorum duorum arcuum ducta in dimidium radii, æqualis eſt rectangulo ſub ſinu ſemiſummæ & ſinu ſemidifferentiæ eorundem arcuum.



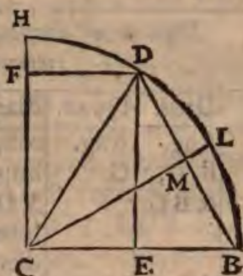
Sint duo arcus BE BF, quorum differentia EF ſit biſecta in D, & erit BD ſemiſumma arcuum, & FD ſemidifferentia.

Eſt

Est G E = I L differentiæ sinuum versorum arcuum B E B F; Item est F O sinus semidifferentiæ arcuum. Ob æquiangula triangula C D K F E G; erit D K : G E :: (C D : F E ::) $\frac{1}{2}$ C D : $\frac{1}{2}$ F E. Unde est D K × $\frac{1}{2}$ F E seu D K × F O = G E × $\frac{1}{2}$ C D = I L × $\frac{1}{2}$ C D. Q. E. D.

PROP. XXXVIII.

Sinus versus cujusvis arcus, ductus in dimidium Radii, æqualis est quadrato sinus dimidii ejusdem arcus.



Triangula C B M D E B sunt æquiangula ob angulos ad M & E rectos & angulum ad B communem. Quare est E B : B D :: B M : B C erit itaque E B × B C = B M × B D & E B × $\frac{1}{2}$ B C = B M × $\frac{1}{2}$ B D = B M q. Q. E. D.

PROP. XXXIX.

In quolibet Triangulo A B C, cujus crura angulum B continentia sint B C A B, & basis A C eundem angulum subtendat; si capiatur A M arcus = differentiæ crurum = B C — A B. erit Rectangulum sub sinubus crurum B C B A ad quadratum Radii ut Rectangulum sub sinu arcus $\frac{AC + AM}{2}$ *& sinu arcus* $\frac{AC - AM}{2}$ *ad Quadratum sinus dimidii anguli B.*

Vide Fig. Prop. 36. hujus.

Quoniam est rectangulum sub sinubus crurum A B B C ad quadratum radii, ut I L ad sinum versum anguli B vel ut $\frac{1}{2}$ R × I L ad $\frac{1}{2}$ R ductum in sinum versum anguli B (per prop. 36. hujus) Est autem $\frac{1}{2}$ R × I L = rectangulo sub

ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ (per pr. 37. hujus.) Item eſt ½ R ductus in ſinum verſum anguli B æqualis Quadrato ſinus dimidii anguli B. Quare erit Rectangulum ſub ſinubus crurum, ad Radii quadratum, ut Rectangulum ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ ad Quadratum ſinus dimidii anguli B. Q. E. D.

Sequuntur duodecim Caſus Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

	Datis.	Quær.	Fiat. *Vide Fig. Prop.* 31.
1	Ang. B, D, & B C.	Ang. C.	coS, B C : R : : T, B : coT, B C A (per 30. hujus.) Item coS, B : S, B C A : : coS, D : S, D C A (per 31. hujus.) Horum angulorum B C A D C A ſumma, ſi perpendicularis cadat intra triangulum, vel differentia, ſi extra cadat; erit = B C D. Num perpendicularis cadat intra vel extra, cognoſcitur ex affectione angulorum B & D (per 22. hujus) quod ſemel monuiſſe ſufficiat.
2	Ang. B, C, & latere B C.	Ang. D.	coS, B C : R : : T, B : coT, B C A (per 30. hujus) & S, B C A : S, D C A : : coS, B : coS, D (per 31, hujus.) Si B C A ſit minor B C D, angulus D erit ejuſdem affectionis cum angulo B. Sin B C A ſit major B C D, anguli B & D erunt affectionis diverſæ per converſam pr. 22.
3	B C C D lateribus & ang. B.	B D latus.	R : coS, B : : T, B C : T, B A. (per 28. hujus) & coS, B C : coS, B A : : coS, D C : coS, D A (per 32. hujus.) horum B A D A ſumma vel differentia, prout perpendicularis cadit intra, vel extra Triangulum, eſt æqualis B D; quod cognoſci nequit niſi cognita ſit ſpecies alterius anguli D.

Datis

	Datis.	Quær.	Fiat.
4	BC DB lateribus & ang. B.	C D latus.	R : coS, B : : T, B C : T, B A (per 28. hujus.) Et coS, B A : coS, B C : : coS, D A : coS, D C. (per 32. h.) Prout D A similis eſt aut diſſimilis C A vel ang. B D C, erit D C minor aut major Quadrante (per 19 & 20 hujus.)
5	B, D, ang. & B C. latere.	B D latus.	R : coS, B : : T, B C : T, B A (per 28. hujus.) Et T, D : T B : : S, B A : S, D A (per 33. hujus) quorum B A D A ſumma vel differentia = B D.
6	BC BD lateribus & ang. B.	Ang. D.	R : coS, B : : T, B C : T, B A. (per 28. hujus.) Et S, D A : S, B A : : T, B : T, D (per 33. hujus.) Prout B D minor eſt aut major quam B A, angulus D ſimilis aut diſſimilis erit angulo B. (per 22. hujus.)
7	BC DC lateribus & ang. B.	Ang. C.	coS, B C : R : : coT, B : T, B C A (per 30. h.) Et T, D C : T, B C : : coS, B C A : coS, D C A (per 34. hujus.) Angulorum B C A D C A ſumma aut differentia, prout perpendicularis cadit intra vel extra triangulum, eſt æqualis angulo B C D.
8	B, C, ang. & B C latere.	D C latus.	coS, B C : R : : coT, B : T, B C A. (per 30. hujus. Item coS, D C A : coS, B C A : T, B C : T, D C (per 34. h.) Si angulus D C A ſimilis ſit angulo B (hoc eſt, ſi A D ſit ſimilis C A) erit D C minor quadrante. Si anguli D C A & B ſint diſſimiles, erit D C quadrante major, quod ſequitur (ex pr. 18 19 & 20 h.)
9	BC DC lat. & ang. B.	D. ang	S, C D : S, B : : S, B C : S, D qui ambiguus eſt. Analogia ſequitur (ex prop. 35. hujus.)
10	B D ang. & BC lat.	D C	S, D : S, B C : : S, B : S, D C quod latus ambiguum eſt.

Datis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
11	AB BC CA omnibus lateribus *vide fig. pr.* 36.	Ang. B.	Rectangulum ſub ſinubus crurum AB BC:quadratum Radii :: rectangulum ſub ſinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$: Quadrato ſinus ½ ang. B. per prop. 39.
12	GHD omnibus. ang.	GD latus.	*Vide fig. prop.* 14. In Triangulo XNM, Eſt MN complementum anguli GHD ad ſemicirculum. XM complementum anguli G & XN complementum anguli D. & angulus X complementum eſt lateris GD ad ſemicirculum. Quare mutatis angulis in latera, & lateribus in angulos; eadem eſt operatio quæ eſt in caſu 11 hujus, cum arcus & eorum complementa ad ſemicirculos habeant eoſdem ſinus.

DE

DE
Natura & Arithmetica
LOGARITHMORUM
PRÆFATIO.

INgens olim compendium accepit Mathesis, primo characterum Indicorum, deinde Fractionum decimalium introductione; non minus tamen adjumenti ex Logarithmis, quam ex utroque invento, ei accessit: quorum quidem usum, per omnes disciplinas mathematicas latissime patentem, quis iis studiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immensi & aliàs plane intractabiles sine ullo tædio in ordinem coguntur: præsentissimum horum auxilium ubique conspicitur, sive cursum navis dirigat Nauta, sive curvarum altiorum indolem investiget Geometra, sive stellarum loca exquirat Astronomus, sive alia naturæ phænomena explicet Physicus, sive demum pecuniæ ex usuris incrementum computet Nummatus.

Argumento, in quo versatur hic libellus, illustrando non defuerunt viri in re Mathematica primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissimè illi quidem, sed magistris solum scripserunt: alii ad Tyronum captum se accommodantes, certas quasdam, easque magis obvias Logarithmorum proprietates selegerunt, intimam eorum naturam non aperuerunt. Quod igitur adhuc desiderari videbatur, mihi in animo erat supplere hoc tractatu, qui in id præcipue collimat, ut Logarithmorum scientia iis, qui ultra Arithmeticæ speciosæ & Geometriæ elementa non processerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile

Mirabile Logarithmorum Inventum Nepero Scoto Merchestonii *Baroni debetur, qui primus canonem Logarithmorum descripsit, construxit, & edidit,* Edinburgi *Anno* 1614. *Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, grati arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris Inventis plures contendant Gentes, omnes tamen* Neperum *Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruitur.*

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam Neperus *excogitavit, & communicato consilio cum Domino* Henrico Briggio, *Geometriæ in Academia* Oxoniensi *Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam redactos compleret. Sed* Nepero *demortuo, totum quod restabat onus in* Briggium *devolutum est, qui magno labore, & summa qua pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus* (*seu ab* 1 *usque ad* 20000) *aliisque undecim ab* 90000 *usque ad* 101000, *pro quibus omnibus numeris, supputavit Logarithmos quatuordecem figurarum locis constantes. Hic canon editus est* Londini *anno* 1624.

Eundem Canonem iteratò edidit Goudæ *apud* Batavos *anno* 1628. Adrianus Vlacq, *suppletis, ut docuerat* Briggius, *chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.*

Computavit etiam Briggius *Logarithmos Sinuum & Tangentium, pro singulis Gradibus graduumque centesimis, ad* 15 *figurarum loca, quibus adjunxit sinus Tangentes & secantes veros seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi sinuum & Tangentium dicuntur sinus & Tangentes Aritificiales. ipsi vero sinus & Tangentes, naturales vocantur. Has Tabulas simul cum Tractatu de Tabularum constructione & usu, post mortem* Briggii, *sub nomine* Trigonometriæ Britannicæ *edidit* Henricus Gelibrand Londini *Anno* 1633.

Post illud tempus, pluribus in locis Tabularum compendia

dia prodiere. In quibus sinus Tangentes, eorumque Logarithmi, tantum constant septem notarum locis, & numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 *usque ad* 10000, *qui pro plerisque casibus sufficere possunt.*

Harum Tabularum dispositio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit Nathaniel Roe Anglus Suffolciensis, *quamque, quibusdam in melius mutatis, sequitur* Sherwinus *in Tabulis suis Mathematicis* Londini *Anno* 1705 *editis, in quibus habentur Logarithmi Numerorum omnium ab unitate usque ad* 101000 *septem figurarum notis constantes, Logarithmorum quoque differentiæ partesque proportionales adscribuntur, quarum ope Logarithmi numerorum usque ad* 10000000 *facile haberi possunt: quatenus scil. hi Logarithmi septem tantum figurarum notis exprimantur. Præterea in iisdem prostant Sinus Tangentes & Secantes, cum eorum Logarithmis & differentiis pro quolibet gradu & minuto Quadrantis, cum aliis quibusdam tabulis Mathesi Practicæ inservientibus.*

CAPUT

CAPUT I.

De ortu & natura Logarithmorum.

QUemadmodum in Geometria, linearum magnitudines numeris ſæpe definiuntur; ita quoque in Arithmetica viciſſim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, aſſumendo ſcil. lineam aliquam quæ ipſa unitatem repræſentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps, exponet. Hac ratione quorundam numerorum Geneſis & proprietates melius concipiuntur, clariuſque in animo verſantur, quam per abſtractos numeros fieri poſſit.

Hinc ſi quælibet linea *a* in ſeipſam ducatur, (*Fig.* 1.) quæ exinde prodit quantitas a^2, non æſtimanda eſt tanquam duarum dimenſionum, ſive ut Quadratum Geometricum cujus latus eſt linea *a*, ſed tanquam linea quæ ſit tertia proportionalis lineæ pro unitate aſſumptæ, & lineæ *a*. Sic etiam ſi a^2 per *a* multiplicetur, quæ prodit a^3, non erit trium dimenſionum quantitas, ſeu cubus Geometricus, ſed linea quæ eſt quartus terminus in progreſſione Geometrica cujus primus terminus eſt 1, ſecundus *a*. Nam termini $1\ a\ a^2\ a^3\ a^4\ a^5\ a^6\ a^7$ &c. ſunt in continua ratione 1 ad *a*: & indices terminis affixi oſtendunt locum ſeu diſtantiam, quam quiſque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 eſt in quinto loco ab unitate, a^6 in ſexto ſeu ſexies magis diſtans ab unitate quam *a* ſeu a^1, qui immediate ſequitur unitatem.

Si inter terminos 1 & *a* inſeratur medius proportionalis qui eſt $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$, nam ejus diſtantia ab unitate erit ſemiſſis diſtantiæ *a* ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ ſcribi poteſt $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſi inter *a* & a^2 inſeratur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3}{2}$, nam ejus diſtantia erit ſeſquialtera diſtantiæ ipſius *a* ab unitate.

Si inter 1 & *a* inſerantur duo medii proportionales; horum

horum primus eſt radix cubica ipſius a, cujus index debet eſſe $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille diſtat ab unitate tertiâ tantum parte diſtantiæ ipſius a, adeoque radix cubica ſcribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hinc Index ipſius Unitatis eſt o, nam unitas non diſtat à ſeipsâ.

Eadem ſeries quantitatum Geometrice proportionalium continuari poteſt utrinque, tam deſcendendo verſus ſiniſtram, quam aſcendendo verſus dextram; termini enim $\frac{1}{a^5}$ $\frac{1}{a^4}$ $\frac{1}{a^3}$ $\frac{1}{a^2}$ $\frac{1}{a}$ 1 a a^2 a^3 a^4 a^5 &c. ſunt omnes in eadem progreſſione Geometrica. Adeoque cum diſtantia ipſius a ab unitate ſit verſus dextram & poſitiva ſeu $+1$, diſtantia æqualis in contrariam partem, ſcil. diſtantia termini $\frac{1}{a}$ erit negativa ſeu -1, qui erit index termini $\frac{1}{a}$ pro quo itaque ſcribi poteſt a^{-1}. Similiter in termino a^{-2}, index -2 oſtendit terminum in ſecundo loco ab unitate verſus ſiniſtram locari, idemque valet terminus a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} eſt idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hi negativi oſtendunt terminos ad quos pertinent, in partem diſcedere contrariam ei, quâ ab unitate progrediuntur termini, quorum indices ſunt poſitivi. Hiſce præmiſſis.

Si ſuper linea AN utrinque indefinite extensâ, (*Fig.* 2.) capiantur AC CE EG GI IL dextrorſum. Item AΓ ΓΠ &c. ſiniſtrorſum, omnes inter ſe æquales: & ad puncta Π Γ A C E G I L erigantur ſuper AN perpendiculares rectæ ΠΣ ΓΔ AB CD EF GH IK LM quæ ſint omnes continue proportionales, numeroſque repreſentent, quorum AB ſit unitas. Lineæ AC AE AG AI AL — AΓ — AΠ diſtantias numerorum ab unitate reſpective exponent, ſive locum & ordinem quem quiſque numerus in ſerie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate diſtat. In AG cum ſit tripla rectæ AC, erit numerus GH in tertio ab unitate loco, ſi modo CD ſit in primo, ſic LM erit in quinto loco cum ſit AL = 5 AC.

Quod si proportionalium extremitates ΣΔBDFH KM rectis lineis jungantur; figura ΣΠLM fit polygonum pluribus aut paucioribus constans lateribus, prout plures aut pauciores in progressione fuerint termini.

Si partes AC CE EG GI IL bisecentur in punctis *c e g i l* & rursus excitentur perpendiculares *cd ef gh ik lm*, quæ sint mediæ proportionales inter AB CD, CD EF, EF GH, GH IK, IK LM, nova orietur proportionalium series, cujus termini incipiendo ab eo qui proxime sequitur unitatem duplo plures sunt, quam in prima serie, & terminorum differentiæ minores fiunt, propiusque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quam prius; quin etiam in hac nova serie, rectæ AL AC distantias terminorum LM CD ab unitate exponent, scil. cum AL decies major sit quam A*c*; erit LM decimus seriei terminus ab unitate, & ob A*e* triplo majorem quam A*c*, erit *ef* tertius seriei terminus, modo *cd* sit primus: & inter AB & *ef* erunt duo medii proportionales, inter AB vero & LM erunt novem termini medii proportionales.

Quod si linearum extremitates B*d*D*f*F*h*H &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus constans lateribus.

Si rursus distantiæ A*c* *c*C C*e* *e*E &c. bisecari concipiantur, & inter binos quosque terminos, ad medias illas distantias inseri intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium series, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior. Terminorum vero differentiæ minores erunt; junctisque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur secundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum à seinvicem distantias.

Quin in hac nova serie, distantiæ AL AC &c. determinabunt terminorum ordines seu locos, nempe si sit AL quintuplo major quam AC; sitque CD quartus ab unitate seriei terminus: erit LM istius seriei terminus vicesimus ab unitate.

Si sic continuo inter binos quosque terminos inserantur medii proportionales, fiet tandem numerus termino-

rum

rum ſeriei, ſicut & laterum polygoni major quolibet dato numero ſeu infinitus; latera vero ſingula magnitudine diminuta fient quavis datâ rectâ lineâ minora; Adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea conſiderari poteſt, tanquam polygonum cujus latera ſunt numero infinita, & magnitudine minima.

Curva ſic deſcripta dicitur *Logarithmica*, in qua ſi numeri per rectas ad axem A N normaliter inſiſtentes, repreſententur; portio Axis inter numerum quemlibet, & Unitatem intercepta, oſtendit locum ſeu ordinem quem numerus ille obtinet in ſerie Geometrice proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem diſtantium. Verbi gratia, ſi A L ſit quintuplo major quam A C, ſintque ab unitate ad L M mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad C D ducenti termini ejuſdem ſeriei, ſeu erit C D terminus ſeriei ducenteſimus ab unitate; & quicunque ſupponatur numerus terminorum ab A B ad L M, erit iſtius numeri pars quinta numerus terminorum ab A B ad C D.

Curva Logarithmica poteſt etiam concipi duobus motibus deſcribi, quorum unus æquabilis eſt, alter vero in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. ſi recta A B ſuper A N uniformiter incedat adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribat, interea tamen ita creſcat A B, ut æqualibus etiam temporibus incrementa capiat, quæ ſint toti lineæ creſcenti proportionalia, hoc eſt ſi A B progrediendo in *c d*, augeatur parte ſui *o d*, & hinc æquali tempore quando in C D pervenerit, augeatur ſimili parte D*p*, quæ ſit ad *d c* ut incrementum *d o* ad A B, ſimiliter, dum æquali tempore ad *e f* pervenerit, creſcat parte *f q*, quæ ſit ad D C ut D*p* ad *d c* ſeu ut *d o* ad A B, id eſt, in æqualibus temporibus incrementa facta ſint ſemper totis proportionalia.

Vel ſi linea A B regrediendo in contrariam partem, in conſtanti ratione minuatur, ita ut, dum æqualia ſpatia A Γ Γ Π pertranſit, decrementa patiatur A B — Γ Δ Γ Δ — Π Σ quæ ſint ipſis A B Γ Δ proportionalia. Lineæ ſic creſcentis aut decreſcentis terminus Logarithmicam deſcribet.

Nam cum ſit AB : *do* :: *dc* : D*p* :: DC : *fq* erit componendo AB : *dc* :: *dc* : DC :: DC : *fe* & ita deinceps.

Per hos duos motus, unum ſcil. æquabilem, alterum proportionaliter acceleratum aut retardatum, ipſe *Neperus* Logarithmorum originem expoſuit. Logarithmum ſinus cujuſque arcus vocavit, *Numerum qui quam proxime definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum ſinus totius linea proportionaliter in ſinum illum decrevit.*

Ex hac Logarithmicæ deſcriptione conſtat, numeros omnes in æqualibus diſtantiis, eſſe continue proportionales. Quin etiam patet, quod ſi ſint quatuor numeri AB CD IK LM tales, ut diſtantia inter primum & ſecundum ſit æqualis diſtantiæ inter tertium & quartum, qualiſcunque ſit diſtantia ſecundi à tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia diſtantiæ AC IL ſunt æquales, erit AB ad incrementum D*s* ut IK ad incrementum MT; unde componendo AB : DC :: IK : ML. Et viciſſim, ſi quatuor numeri ſint proportionales, erit diſtantia inter primum & ſecundum, æqualis diſtantiæ inter tertium & quartum.

Diſtantia inter duos quoſlibet numeros, dicitur Logarithmus rationis iſtorum numerorum, & metitur non quidem ipſam rationem, ſed numerum terminorum in data ſerie Geometrice proportionalium progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum æqualium, quarum compoſitione efficitur numerorum ratio.

Si diſtantia inter duos quoſvis numeros ſit dupla diſtantiæ inter alios duos numeros; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis poſteriorum. Sit enim diſtantia IL inter numeros IK LM dupla diſtantiæ A*c* quæ eſt inter numeros AB *cd*, biſecta IL in *l* ob A*c* = I*l* = *l*L, erit ratio IK ad *lm* æqualis rationi AB ad *cd*, adeoque ratio IK ad LM quæ eſt duplicata rationis IK ad *lm*, (per *defin.* 10. *El.* 5.) erit etiam duplicata rationis AB ad *cd*.

Similiter ſi diſtantia EL ſit tripla diſtantiæ AC; erit Ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD. Nam ob diſtantiam triplam, triplo plures erunt proportionales

ab

ab EF ad LM quam ſunt ejuſdem rationis termini ab AB ad CD. at tam ratio EF ad LM, quam ratio AB ad CD, componitur ex rationibus æqualibus intermediis, (per 5. *defin. El.* 6.) Adeoque ratio EF ad LM ex triplo pluribus rationibus compoſita, Triplicata erit rationis AB ad CD. Similiter ſi ſit GL diſtantia quadrupla diſtantiæ A*c*, erit ratio GH ad LM Quadruplicata rationis AB ad *c d*. & ita deinceps.

Numeri cujuſlibet Logarithmus, eſt Logarithmus rationis Unitatis ad ipſum numerum, vel eſt diſtantia inter unitatem & illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, ſeu ordinem, quem quiſque numerus obtinet ab unitate in ſerie Geometrice proportionalium. Verbi gratia ſi ab unitate ad numerum 10 ſint proportionales numeri 10 000 000 hoc eſt ſi ſit numerus 10 in loco 10 000 000mo; per computationem invenietur, eſſe in eadem ſerie ab unitate uſque ad 2 proportionales terminos numero 3 010 300, hoc eſt numerus binarius ſtabit in loco 3 010300mo. Similiter ab unitate uſque ad 3, invenientur termini proportionales 4 771 213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 10 000000, 3 010300, 4771213. erunt Logarithmi numerorum 10, 2, & 3.

Si primus ſeriei terminus ab unitate dicatur y, erit ſecundus terminus y^2, tertius y^3, &c. cumque ponitur numerus denarius ſeriei terminus 10 100 000^{mus}, erit $y^{10000000} = 10$. Item erit $y^{3010300} = 2$. Item $y^{4771213} = 3$, & ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt poteſtates aliquæ illius numeri, qui eſt ab unitate primus. Et poteſtatum indices ſunt numerorum Logarithmi.

Cum Logarithmi ſint diſtantiæ numerorum ab unitate, ut ſuperius oſtenſum eſt. Erit Logarithmus ipſius unitatis 0, nam unitas non diſtat à ſeipſa. At fractionum Logarithmi ſunt negativi ſeu infra nihil deſcendentes, hi enim in contrariam diſcedunt partem; adeoque ſi numeri ab unitate proportionaliter creſcentes habeant Logarithmos poſitivos, ſeu ſigno + affectos, Numeri ab unitate

 ſimiliter

ſimiliter decreſcentes, ſeu fractiones habebunt Logarithmos negativos, ſeu ſigno — affectos. Quod verum eſt quando Logarithmi æſtimantur per diſtantias numerorum ab unitate.

At ſi initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, ſed ab unitate quæ eſt in loco aliquo fractionum decimalium, verbi gratia à fractione $\frac{1}{1\,00000\,00000}$; tunc omnes fractiones hac majores habebunt Logarithmos poſitivos, reliquæ minores, obtinebunt Logarithmos negativos, ſed de hac re plura poſtea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus DC EF GH IK &c. diſtantiæ CE EG GI &c. ſint æquales, erunt horum numerorum logarithmi AC AE AG AI &c. æquidifferentes, ſeu Logarithmorum differentiæ erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi ſunt omnes in progreſſione Arithmetica. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, viz. Logarithmi ſunt numeri qui proportionalibus adjuncti, æquales ſervant differentias.

In prima quam *Neperus* edidit Logarithmorum ſpecie, poſuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate diſtare, quantum ipſe terminus unitatem ſuperabat. h. e. Si vn ſit primus ſeriei terminus ab unitate AB, ejus Logarithmum ſeu diſtantiam An vel By æqualem eſſe voluit ipſi vy, ſeu incremento numeri ſupra unitatem, ut ſi vy ſit 1, 0000001, ejus Logarithmum An ponebat 0, 0000001, & hinc computatione factâ Numerus Denarius ſeu 10 erit 23025850us ſeriei terminus, qui itaque numerus eſt Logarithmus denarii in hac Logarithmorum forma, & exprimit ejus diſtantiam ab unitate in partibus quarum vy vel An eſt una.

At hæc poſitio omnino arbitraria fuit, poteſt enim diſtantia primi termini, ad ipſius exceſſum ſupra unitatem, datam quamvis habere proportionem, & pro varia illa ratione, quæ pro arbitrio ſupponi poteſt, eſſe inter vy & By, incrementum primi termini ſupra unitatem & ejuſdem

dem ab unitate diſtantiam, diverſæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum ſpeciem in aliam magis commodam poſtea mutavit *Neperus*, in qua poſuit numerum denarium non eſſe 23025850^{mum} ſeriei terminum, ſed terminum 10000000^{mum}, inque hac Logarithmorum forma, primum incrementum vy erit ad diſtantiam By vel An, ut unitas ſeu AB ad fractionem decimalem, 0, 4342994, quæ itaque exponet Longitudinem ſubtangentis AT. *In Fig.* 4ta.

Poſt mortem *Neperi*, vir ſummus Dominus *Henricus Briggius*, immenſo labore, Logarithmorum Tabulas ad hanc formam conſtruxit & edidit. In hiſce tabulis cum logarithmus denarii ſeu ejus diſtantia ab unitate ponatur 1, 0000000, ſintque 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. continue proportionales,erunt æquidiſtantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit 2, 0000000. millenarii 3, 0000000 & numeri 10000 Logarithmus fiet 4, 0000000 & ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipere debent per 0, ſeu debet eſſe 0 in primo loco verſus ſiniſtram, ſunt enim minores quam Logarithmus numeri 10 cujus initium eſt unitas; & Logarithmi numerorum inter 10 & 100 unitate incipiunt, ſunt enim majores quam 1. 0000000 & minores quam 2. 0000000. Item Logarithmi numerorum inter 100 & 1000 binario incipiunt, ſunt enim majores quam logarithmus numeri 100, quem incipit 2, & minores logarithmo numeri 1000 qui incipit per 3; eodem modo oſtendetur in Logarithmis numerorum inter 1000 & 10000, primam figuram verſus ſiniſtram debere eſſe 3; & in Logarithmis numerorum ab 10000 uſque ad 100000 prima verſus ſiniſtram figura erit 4, & ita deinceps.

Prima cujuſque logarithmi figura verſus ſiniſtram dicitur characteriſtica ſeu index; quia oſtendit altiſſimum ſeu remotiſſimum locum numeri à loco unitatum. v. gr. Si index logarithmi ſit 1, numeri reſpondentis altiſſimus ſeu remotiſſimus verſus ſiniſtram ab unitate locus, erit

locus

locus decadum. Si index 2, remotiſſima numeri reſpondentis figura erit in ſecundo ab unitatum loco, hoc eſt erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altiſſimam numeri ſui figuram eſſe in tertio ab unitatum loco, & inter millenarios locari.

Logarithmi numerorum omnium qui ſunt in progreſſione decupla aut ſubdecupla, characteriſticis ſeu indicibus ſuis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iiſdem ſcribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 170, 1700, 17000. nam cum ſit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; diſtantiæ inter 1 & 17, inter 10 & 170, inter 100 & 1700, inter 1000 & 17000 erunt omnes æquales, ideoque cum diſtantia inter 1 & 17 ſeu Logarithmus numeri 17 ſit 1. 2304489 erit logarithmus numeri 170 = 2. 2304489, & Logarithmus numeri 1700 erit 3. 2304489 ob numeri 100 Logarithmum = 2. 0000000, & ſimiliter ob numeri 1000 Logarithmum = 3. 0000000 Logarithmus numeri 17000 erit 4. 2304489.

Sic etiam numeri 6748. 674, 8. 67, 48. 6, 748. 0,6748, 0, 06748. ſunt continue proportionales ſcil. in ratione 10 ad 1, eorum itaque à ſe invicem diſtantiæ æquales erunt diſtantiæ ſeu Logarithmo numeri 10, ſeu æquales 1, 0000000. quare cum Logarithmus numeri 6748 ſit 3, 8291751, reliquorum logarithmi erunt ut in margine.

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751
0,6748	—1,8291751
0,06748	—2,8291751

In duobus ultimis logarithmis, Indices tantum ſunt negativi, reliquis figuris poſitivis manentibus, adeoque cum reliquæ figuræ addendæ ſunt, ſubtrahendi erunt indices, & vice verſa.

CAPUT

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmetica ubi numeri ſunt integri, vel integri cum decimalibus adjunctis.

QUoniam in multiplicatione, unitas eſt ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, diſtantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis erit diſtantiæ inter multiplicandum & productum; ſi itaque numerus G H per numerum E F eſſet multiplicandus, diſtantia inter G H & productum debet eſſe æqualis diſtantiæ A E, ſeu Logarithmo multiplicatoris, ſi itaque capiatur G L æqualis A E, erit numerus L M productus, hoc eſt, ſi ad A G logarithmum multiplicandi addatur A E Logarithmus multiplicatoris, ſumma erit logarithmus producti.

In Diviſione Unitas eſt ad diviſorem, ut quotus ad dividendum; adeoque diſtantia inter diviſorem & unitatem æqualis erit diſtantiæ inter dividendum & quotum. Sic ſi L M per E F eſſet dividendus, erit diſtantia E A æqualis diſtantiæ inter L M & quotum, adeoque ſi capiatur L G æqualis E A, ad G erit quotus. Hoc eſt, ſi ab A L logarithmo Dividendi, auferatur G L ſeu A E Logarithmus diviſoris, reſtabit A G Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmetica perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, eæ omnes facilius multo, & expeditius fiunt, per additionem aut ſubductionem Logarithmorum.

Sit exempli gratia numerus 7589 multiplicandus per 6757 addendo Logarithmos ut in margine videre eſt, habetur Logarithmus producti, cujus index 7 monſtrat eſſe in producto ſeptem locos præter unitatum locum; & quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio

Log.	3. 8801846
Log.	3. 8297539
Log:	7. 7099385

venio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 & numerum producto majorem esse 51279000, quin capiendo differentias adjunctas, & partes proportionales; invenio notas ante-penultimam & penultimam esse 87, in ultimo autem seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63 adeoque verus productus erit 51278873. Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possunt ex tabulis ubi Logarithmi tantum constat 7 figurarum locis præter characteristicam, adeoque ubi opus est, Tabulæ *Ulacquianæ*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum; vel *Briggianæ*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

Log. 4. 8954004
Log. 2. 4440448
Log. 2. 4513556

Si numerus 78596 dividendus sit per 278, substrahendo Logarithmum divisoris ex Logarithmo dividendi habetur Logarithmus quotientis, cui Logarithmo respondet, Numerus 282,719 qui itaque erit quotiens.

Cum unitas, numerus quilibet assumptus, ejus quadratus, cubus, Biquadratus, &c. sint continue proportionales, eorum à seinvicem distantiæ æquales erunt. Manifestum itaque est Quadrati distantiam ab unitate, duplam esse distantiæ radicis ab eadem: distantiam cubi triplam distantiæ radicis suæ, Biquadrati distantiam esse distantiæ radicis suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si duplicetur logarithmus numeri, dabitur logarithmus Quadrati; si Triplicetur, logarithmus cubi; si quadruplicetur, prodit Logarithmus Biquadrati. Et vice versa si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus Radicis quadratæ ejusdem numeri; Quin & ejusdem logarithmi tertia pars erit logarithmus Radicis Cubicæ; & pars quarta Logarithmus Radicis biquadraticæ, & ita deinceps.

Hinc Radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur Radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars dimidia

dia 0. 3494850, erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, seu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui respondet numerus 2, 23606 quam proxime.

CAPUT III.

De Arithmetica Logarithmorum, ubi numeri sunt Fractiones.

Vide Fig. 3.

QUotiescunque Fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Logarithmi partem, & subducendi alteram, expedit ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, sed ab unitate, quæ sit in decimo vel centesimo loco fractionum decimalium, v. gr. pone PO esse $\frac{1}{1\,00000\,00000}$ & Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis distabit ab unitate versus sinistram, quam numerus 10 ab eadem distat versus dextram, sunt enim Decem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate usque ad PO. Adeoque si AB sit unitas, ejus Logarithmus in hac suppositione non erit 0, sed erit OA = 10. 0000000, Nam distantia denarii ab unitate est 1. 0000000, unde distantia numeri 10 à PO erit 11. 0000000. Item distantia numeri 100 à PO, seu ejus Logarithmus à PO incipiens, erit 12. 000 0000 & numeri 1000 Logarithmus seu distantia à PO erit 13. 000 0000; atque hac ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10. & Fractiones quarum indices fuerunt — 1, aut — 2, aut — 3 &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At si Logarithmi incipiunt à loco Fractionis cujus numerator est unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum est quoties fractiones occurrunt minores quam PO) illa Fractio centies plus distabit ab unitate quam 10 ab ea distat, adeoque Unitatis Logarithmus habebit Indicem 100. Numeri Denarii Logarithmus Indicem habebit 101. Et numeri centenarii Logarithmo

rithmo congruet Index 102, & ita deinceps Indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quæ ſunt majores P O (à quo initium ducitur) Logarithmi erunt poſitivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. ſunt in continua progreſſione Geometrica, æqualiter à ſeinvicem diſtabunt, & eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; Adeoque cum Logarithmus denarii ſit 11. 0000000, & unitatis Logarithmus ſit 10. 0000000 erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10}$ = 9. 0000000; & fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8, 0000000; & ſimiliter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quin etiam eadem ratione ſi index Logarithmicus Unitatis ſit 100 & denarii 101, Erit index Logarithmi Fractionis $\frac{1}{10}$, 99, & Fractionis $\frac{1}{100}$ Index Logarithmi erit 98; & Fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices oſtendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura quæ cyphra non ſit, ponenda fuerit. v. gr. Si index ſit 4 ejus differentia ab indice unitatis quæ eſt 10 ſcil. 6 oſtendit primam decimalis figuram ſignificativam eſſe in 6to ab unitate loco; ergo quinque cyphræ verſus ſiniſtram ei præponendæ ſunt. Ita ſi Unitatis index ſit 100 & fractionis index ſit 80, erit prima ejus figura in viceſimo ab unitatis loco ſeu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam Fractio G H per fractionem D C multiplicanda. Quia unitas eſt ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit diſtantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis diſtantiæ inter multiplicandum & productum. Quare ſi capiatur G I = A C, ad I erit productus I K. Et proinde ſi ab O G Logarithmo multiplicandi, auferatur G I vel A C, reſtabit O I Logarithmus producti. Eſt vero A C = O A — O C, quæ ablata ab O G, relinquetur O G + O C — O A = O I, hoc eſt, ſi ſimul addantur Logarithmi multiplicatoris & multiplicandi, & è ſumma auferatur Logarithmus unitatis (qui ſemper ſcribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur logarithmus producti. ex. gr. Sit Fractio decimalis 0,00734 per fractionem 0,000876 multiplicanda, pono unitatis indicem Logarithmicum eſſe 100, & fractionum Logarithmi erunt

ut

ut in margine, qui additi, & rejecto Logarithmo Unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 ostendit primam producti figuram esse in sexto ab unitatum loco, quinque itaque cyphræ præponendæ sunt, & productus erit ,0000642984.

97, 8656961
96, 9425041
94, 8082002

In Divisione, Divisor est ad unitatem, ut dividendus ad quotum, & proinde distantia inter divisorem & unitatem, æqualis erit distantiæ inter dividendum & quotum. Itaque si fractio I K dividenda esset per D C, capienda erit I G = C A & locus quoti erit G. Est vero C A = O A — O C quæ ad O I addita fit O A + O I — O C = O G. hoc est si addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, & è summa auferatur Logarithmus divisoris, restabit logarithmus quotientis; sic si numerus C D per I K esset dividendus, capienda erit distantia C S = I A, & erit S T quotiens; cujus Logarithmus est O A + O C — O I. Sit C D = 0, 347 I K = 0, 00478. ad logarithmum ipsius C D addatur Logarithmus Unitatis, hoc est ejus Indici præponatur 1 aut 10, & ex eo subducatur logarithmus divisoris, restabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monstrat quotientem esse inter numeros qui sunt à 10 ad 100. quæro itaque numerum logarithmo respondentem, quem invenio esse 72 ,594.

19, 5403295
7, 6794279
11, 8609016

Si fractionis vulgaris verbi gr. $\frac{7}{8}$ logarithmus desideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem est, ejus indici præponatur 1 aut 10 & subducatur ab eo logarithmus denominatoris 8, restabit logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis ,875.

10, 8450980
0, 9030900
9, 9420080

Ut Fractionis cujuslibet D C potestates habeantur, Capiendæ sunt E C E G G I I L singulæ æquales A C, & E F erit quadratus, G H Cubus, I K biquadratus numeri D C, sunt enim ab unitate continue proportionales. Est præterea A E = 2 A C = 2 O A — 2 O C, unde O E = O A — A E = 2 O C — O A, hoc est logarithmus quadrati

E $=\frac{OA-OE}{2}$, Adeo-

OA $-$ AC $=\frac{OA+OE}{2}$.

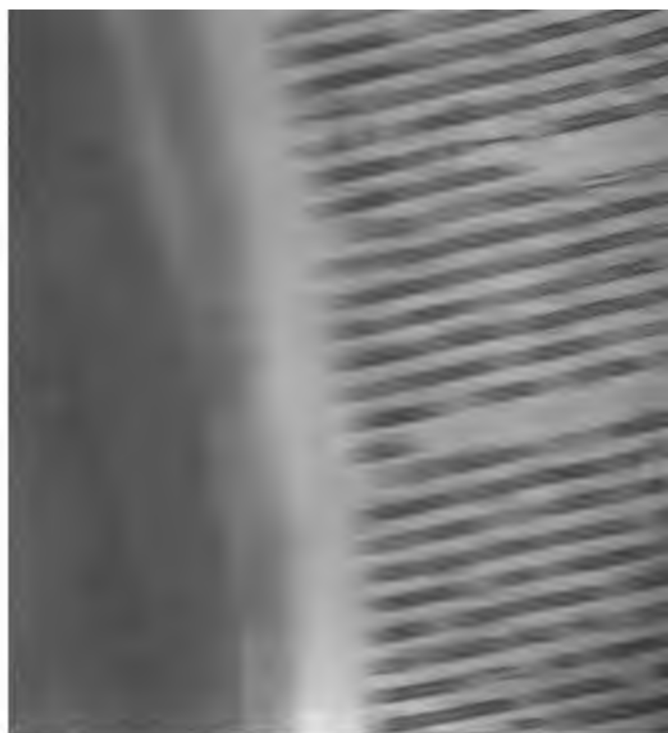
eratur; Radix illa erit
rtionalium inter unita-
in tres partes æquales,
radix quæsita, & quoni-
G
$-$ si hæc subducatur ab

C scil. Logarithmo Ra-

Sic etiam fractionis I K
secando A I in quatuor
st prima trium mediarum
m & Fractionem. Sit itaque
adix biquadratica Fractionis
$-$OI
4 adeoque O C $=$ O A $-$

ctionis L M desideretur radix pote-
Logarithmus erit $\frac{n OA - OA + OL}{n}$,
garithmico fractionis, præponatur nu-
logarithmus sic auctus dividatur per n,
garithmum radicis quæsitæ. Sic si quæ-
bica fractionis $\frac{1}{2}$ sive ,5 hujus Logarithmo
$= n - 1$, quia radix cubica desideratur,
6989700 cujus numeri triens est 9, 8996566
arithmo radicis cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congru-
ithmo numerus est, 7937 qui erit radix quæsi-

CAPUT



ctionis E F. Est vero $AC = \frac{1}{2} AE = \frac{OA - OE}{2}$, Adeoque O C Logarithmus Radicis $= OA - AC = \frac{OA + OE}{2}$. Si fractionis G H radix cubica quæratur; Radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & G H, secetur itaque A G in tres partes æquales, quarum prima sit A C, erit C D radix quæsita, & quoniam est $AC = \frac{1}{3} AG = \frac{OA - OG}{3}$ si hæc subducatur ab O A, restabit $\frac{2\,OA + OG}{3} = OC$ scil. Logarithmo Radicis cubicæ fractionis G H. Sic etiam fractionis I K radix biquadratica habetur, secando A I in quatuor partes æquales. Nam Radix est prima trium mediarum proportionalium inter unitatem & Fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4} AI$, & erit C D Radix biquadratica Fractionis I K. Sed est $\frac{1}{4} AI = \frac{OA - OI}{4}$ adeoque $OC = OA - AC = \frac{3\,OA + OI}{4}$.

Universaliter si fractionis L M desideretur radix potestatis n, ejus radicis Logarithmus erit $\frac{n\,OA - OA + OL}{n}$, hoc est si indici Logarithmico fractionis, præponatur numerus $n - 1$, & logarithmus sic auctus dividatur per n, quotus dabit Logarithmum radicis quæsitæ. Sic si quæratur radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ sive ,5 hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica desideratur, & fiet 29.6989700 cujus numeri triens est 9, 8996566 æqualis Logarithmo radicis cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congruens Logarithmo numerus est, 7937 qui erit radix quæsita.

CAPUT

CAPUT IV.

De Regula Proportionis ſeu Aurea Logarithmica.

Datis tribus numeris, qua ratione quartus proportionalis inveniendus ſit, nos docet proportionis Regula; ſcil. termini ſecundus & tertius in ſe invicem ducendi ſunt, & productus dividendus eſt per primum, qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæſitum. At per logarithmos minore labore habebitur ille quartus; Nam ſi è ſumma Logarithmorum ſecundi & tertii auferatur logarithmus primi, qui reſtat numerus eſt logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam & hic labor minui aliquantulum poteſt, ſi loco logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, ſeu differentia logarithmi à numero 10 0000000, & obtinetur ſi pro ſingulis logarithmi figuris ſcribantur earum differentiæ à 9, Complementum hoc Arithmeticum cum reliquis duobus logarithmis in unam ſummam conjiciatur, & è ſumma, unitatis nota in primo verſus ſiniſtram loco ſita abjiciatur, reſtabit logarithmus quarti termini quæſiti; atque hoc modo per unicam Numerorum trium additionem invenitur logarithmus termini quæſiti. Hujus rei cauſa hinc patebit. Sint tres numeri A B C & è ſumma ſecundi & tertii ſubducendus eſt primus, non tantum operatio communi modo perficitur, ſed etiam ſi aſſumatur numerus quivis E, & ab ea auferatur A, reſtabit E — A ſi numeri B C & E — A in unam ſummam addantur, & è ſumma trium rejiciatur
E, reſtabit B + C — A. ſic ſi ſubducendus eſt nu-
85 merus 15 ex 23 capio numeri 15 complementum
23 ad 100 quod eſt 85, hunc numerum addo ad 23
108 & ſumma fit 108 ex quo ſublato 100 reſtabit nu-
merus 8. ſequuntur Exempla Trigonometrica Regulæ proportionis per Logarithmos ſoluta.

Sit



Sit Triangulum A B C rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. 46′. angulus B 98 gr. 32′. & latus B C, 3478. & quæritur latus AC. Fiat (per *cas.* 1. Trigon. Planæ) Sinus ang. A ad Sinum ang. B ut B C ad A C. Et quia Log.-sinus anguli A est primus analogiæ terminus ejus vice substituo complementum Arithmeticum ejusdem, & addo Log. B C, Log. S, B & prædictum complementum in unam summam, & è summa rejecta unitate quæ est in primo versus sinistram loco, dabitur Logarithmus lateris A C, cui congruens numerus est 5746, 309 æqualis A C lateri quæsito.

Arith. comp. S.A.	0.2228940
Log. Sin. B.	9.9951654
Log. BC	3.5413296
Log. A C.	13.7593890

Sit Triangulum Sphæricum A B C, in quo dantur omnia latera scil. B C = 30 grad. A B = 24 gr. 4′. & A C = 42 gr. 8′. quæritur angulus B. Producatur B A ad M ut sit B M = B C erit A M differentia laterum B C B A æqualis 5 gr. 56′. (Per *cas.* 11. in Triangulis obliquangulis Sphæricis.) Fiat ut rectangulum sub sinubus crurum A B B C ad quadratum Radii ita Rectangulum sub sinubus Arcuum $\frac{AC + AM}{2}$ $\frac{AC - AM}{2}$ ad quadratum sinus anguli $\frac{1}{2}$ B.

Est vero $\frac{AC + AM}{2} = 24$ gr. 2′. & $\frac{AC - AM}{2} = 18$ gr. 6′. Et quia primus analogiæ terminus est rectangulum

ſub ſinubus A B B C, & ſecundus terminus eſt quadratum Radii; Summa Log. Sin. A B B C ſubducenda erit ex duplo Log. Radii & qui reſtat numerus addendus eſt ad ſummam Log. S $\frac{AC+AM}{2}\frac{AC-AM}{2}$. Quod idem erit ac ſi ſinguli Log. Sinus arcuum A B B C ſubducerentur à Logarith. Radii, vel ſi horum ſinuum capiantur complementa Arithmetica, Atq; complementa illa & prædicti ſinus in unam conjicerentur ſummam. Summa illa erit Logarithmus quadrati ſinus dimidii anguli B.

Log. S,B C comp. Arith.	0. 3010300
Log. S,A B comp. Arith.	0. 3895535
Log. S $\frac{AC+AM}{2}$	9. 6098803
Log. S, $\frac{AC-AM}{2}$	9. 4923083
2 Log. S, Ang. B.	19. 7927721

Logarithmi itaque dimidium 9. 8963860 eſt Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}$B = 51 gr. 58′. 31″. & hujus anguli duplum erit 103 gr. 57′. 02″ = angulo E qui erat inveniendus.

CAPUT V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, Et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in ſerie Proportionalium, ſive creſcente, ſive decreſcente.

SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris S V V Y Y Q &c. æquales, & ad puncta S V Y Q &c. erigantur perpendiculares S T V X Y R Q Π &c. ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua incrementa X x Z z Π π erunt totis proportionalia. Nam ob S T : V X :: V X : Y Z :: Y Z : Q Π erit dividendo

Vide Fig. 3.

videndo $ST : Xx :: VX : Zz :: YZ : \Pi\pi$, & componendo $VX : Xx :: YZ : Zz :: Q\Pi : \Pi\pi$. Hinc si Xx sit pars quælibet rectæ ST, erit Zz eadem pars rectæ VX, & $\Pi\pi$ quoque eadem pars rectæ YZ. ex. gr. Si Xx sit $\frac{1}{20}$ ST, erit $Zz = \frac{1}{20} VX$, & $\Pi\pi = \frac{1}{20} YZ$; seu quod eodem redit, erit $VX = ST + \frac{1}{20} ST$. $YZ = VX + \frac{1}{20} VX$, item $Q\Pi = YZ + \frac{1}{20} YZ$.

Fiat ut ST ad VX, ita AB unitas ad NR; erit $AN = SV$; adeoque rectæ SV VY YQ &c. erunt singulæ æquales logarithmo ipsius RN, & AV Logarithmus termini VX erit æqualis $AS + AN =$ Logarithmo ipsius ST + Logarithmo ipsius NR. Item AY Logarithmus termini YZ æqualis erit $AS + 2AN =$ Log. ST + 2 Log. NR, & AQ logarithmus Termini $Q\Pi$ æqualis erit $AS + 3AN =$ Log. ST + 3 Log. NR. Et universaliter si Logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujusvis distantiam à termino primo, & productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini. At si series proportionalium sit decrescens; seu si termini in continua ratione minuantur, & $Q\Pi$ sit primus, habebitur Logarithmus alterius cujusvis termini, multiplicando Logarithmum numeri NR per numerum qui exponit ejus termini distantiam à primo, & subducendo productum è Logarithmo primi. Quod si productus ille sit major Logarithmo primi termini initio ab unitate ducto; in eo casu ponendi sunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusâ, verbi gratia ab OP ita Logarithmus numeri $Q\Pi$ erit OQ.

Exponat jam LM quamvis pecuniam, seu pecuniæ summam à creditore Fœnori elocatam, ea lege ut singulis annis Usura annua sorti annumeretur, & finito primo anno, sit usura seu lucrum Kk, & IK aggregatum sortis & lucri pariat usuram Hh quæ sit ipsi IK proportionalis, seu in ratione constanti. Hæc usura Hh finito anno secundo, sorti accedat, & sors ea sit GH, quæ ad finem anni tertii pariat usuram Ff, ipsi GH proportionalem; Ponamus sortem singulis annis augeri parte sui vice-

 sima,

ſima, $\frac{1}{20}$, adeoque erit $IK = LM + \frac{1}{20} LM$, $GH = IK + \frac{1}{20} IK$. $EF = GH + \frac{1}{20} GH$, & ita deinceps. Erunt proinde termini L M I K G H E F &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit L M ſemiobolus, Anglice *A farthing*. Ob L M ad I K ut 1 ad $1 + \frac{1}{20}$ vel ut 1 ad 1,05. ut A B ad N R, erit N R = 1,05, cujus Logarithmus A N eſt 0. 0211893, vel magis accurate 0. 021189299I. Quæritur quantum lucri accedat ſemiobolo, qui ſexcentis annis fænori expoſitus eſt. Multiplicetur AN per 600 productus erit 12. 7135794. Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe 97, 0177288. (nam eſt ſemibolus pars libræ $\frac{1}{960}$) ſumma 109. 7313082 erit Logarithmus numeri quæſiti, cumque index 102 ſuperat indicem Unitatis novenario ſeu 9, erunt in numero reſpondente novem figurarum loca ſupra locum Unitatum, & numerus ille in tabulis quæſitus invenietur major quam 538650000, & minor quam 538660000. Unus itaque ſemiobolus fænori datus, finitis ſexcentis Annis, pariet libras Anglicanas plures quam 538650000; Cui ſummæ ſolvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipſa rerum origine ad hunc uſque diem ex terrarum viſceribus eruta eſt.

Exponat Q Π quamvis pecuniæ ſummam quam poſt exactum integrum annum debitor creditori ſolvere tenetur, ſed ſine uſurâ. Certum eſt ſi Debitor nunc totam ſolveret, illum amiſſurum jus quod habet in uſuram annuam quæ ex pecunia illa prodiret; Quin & minor ſumma fœnori expoſita, poteſt poſt annum cum ſua uſura, ſummam Q Π adæquare. Minor illa pecuniæ ſumma, quæ cum ſua Uſura pecuniam Q Π adæquat, præſens pecuniæ Q Π valor dicitur. Sit A N Logarithmus Rationis quam ſors habet ad aggregatum ſortis & uſuræ, hoc eſt, ſi ſors ſit Uſuræ annuæ Vigecupla, ſit A N Logarithmus numeri $1 + \frac{1}{20}$ ſeu 1, 05, & capiatur Q Y æqualis A N; erit A Y Logarithmus præſentis valoris pecuniæ Q Π. Patet enim pecuniam YZ fœnori expoſitam finito anno parituram pecuniam Q Π, adeoque ut habeatur logarithmus præſentis valoris,

valoris, seu Y Z; ex Logarithmo A Q detrahi debet Logarithmus A N, & restabit A Y logarithmus præsentis valoris vel Y Z. Si summa Q Π non nisi post duos annos exactos debeatur; à logarithmo A Q subtrahendus est numerus 2 A N, & manebit A V logarithmus præsentis valoris, seu summæ quæ pro pecunia Q Π solvi statim debeat. Nam manifestum est pecuniam V X fœnori expositam, spatio duorum annorum, pecuniam Q Π procreaturam. Eadem ratione, si summa Q Π non nisi post tres annos debetur, à logarithmo Q Π subtrahendus erit numerus 3 A N, & qui restat A S, erit logarithmus numeri S T, seu erit S T præsens valor summæ Q Π post tres annos solvendæ. Et universaliter, si logarithmus A N multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis debetur summa Q Π, & productus numerus ex logarithmo A Q subducatur, hac ratione dabitur logarithmus numeri, qui erit præsens valor summæ Q Π. Hinc patet si 5386500000 libræ Angl. societati alicui finitis sexcentum annis solvendæ fuerint; tantæ pecuniæ præsentem valorem, vix unum semiobolum adæquaturum.

Si in axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ H G E F, A B C D quæ sint proportionales, & extremitates ipsarum F H D B rectis jungantur, quæ productæ cum Axe conveniant in P & K, erunt rectæ G P A K semper æquales. Nam ob G H : E F :: A B : C D. erit G H : F S :: A B : D R. Sed ob æquiangula triangula P G H H S F, Item K A B B R D æquiangula erit P G : H S :: (G H : F S :: A B : D R ::) K A : B R. Quarum proportionalium consequentes H S B R æquales sunt, Antecedentes igitur P G K A æquales erunt. Q.E.D. *Fig.* 4.

Si rectæ C D E F ad A B G H æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B, & punctum F cum H, rectæ D B K F H P quæ prius secabant curvam, vertentur in Tangentes B T, H V; & rectæ A T G V semper sibi invicem æquales erunt, hoc est, portio Axis A T vel G V intercepta inter ordinatam & Tangentem quæ Subtangens dicitur, erit ubique constantis & datæ longitudinis quæ est præcipua Logarithmicæ Proprietas. Nam

in diverſis logarithmicis, ſubtangentes curvarum ſpecies ſeu formas determinabunt.

In duabus diverſæ ſpeciei logarithmicis, ejuſdem numeri logarithmi, ſeu diſtantiæ ab unitate, erunt ſubtangentibus ſuarum curvarum proportionales. Sint enim curvæ HBD SNY, quarum ſubtangentes ſint AT MX, ſitque AB = MN = unitati, item DC = QY; erit AC logarithmus numeri CD, in logarithmica HD, ad MQ logarithmum numeri QY, ſeu ejuſdem CD in logarithmica SY, ut ſubtangens AT ad ſubtangentem MX. Concipiatur interſeri inter AB CD vel MN QY, infinitos terminos continue proportionales, in ratione AB ad *ab* vel MN ad *mn*; & ob AB = MN erit *ab* = *mn*. item erit *bc* = *no*. Et termini proportionales cum in utraque figura ſint numero æquales, divident lineas AC MQ in partes numero æquales, quarum primæ ſint A*a* M*m*, partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc eſt erit A*a* : M*m* : : AC : MQ. Quoniam autem triangula TAB B*cb* ſunt ſimilia (nam pars curvæ B*b* coincidet fere cum portione tangentis) item triangula XMN, N*on* ſunt ſimilia. Erit A*a* vel B*c* : *bc* : : TA : AB

Fig. 4. & 5.

Item eſt *no* vel *bc* : N*o* : : MN vel AB : MX.

Unde erit ex æquo, B*c* : N*o* : : TA : MX : : A*a* : M*m* : : AC : MQ. Q.E.D. Si AT vocetur *a*, ob AB : AT : : *bc* : B*c*; erit $Bc = \frac{a \times bc.}{AB}$

Hinc ſi detur logarithmus numeri, qui ſit unitati proximus, vel illam minimo exceſſu ſuperat, dabitur logarithmicæ ſubtangens, eſt enim exceſſus *bc* ad logarithmum B*c* ut AB unitas ad ſubtangentem AT. Vel etiam ſi ſint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam logarithmorum, ut alteruter numerorum ad ſubtangentem. v. gr. Si incrementum *bc* ſit ,00000 00000 ,00001 02255 31945 60259, & B*c* vel *Aa* logarithmus numeri *ab* ſit ,00000 00000 00000 44408 92098 50062. duobus his numeris & unitati inveniatur quartus proportionalis, ſcilicet

43429

43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem ſubtangentis A T, quæ eſt ſubtangens logarithmicæ quæ exhibet logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ ſummam fœnori exponat, ea lege, ut ſingulis temporis momentis, pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, ita ſcil. ut poſt finitum primum temporis momentum, ſeu exactam anni particulam indefinite exiguam, uſuram poſcat tempori proportionalem, quæ ſorti adjecta, unà cum ipſa, uſuram pariat, finito ſecundo temporis momento, ſorti pariter acceſſuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a uſura annua Unitatis, ſeu unius libræ. & ſi integer annus ſeu 1 dat uſuram a, particula anni indefinite exigua Mm dabit uſuram ipſi Mm proportionalem $Mm \times a$; & proinde ſi Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no = Mm \times a$. Per puncta Nn concipiatur logarithmica deſcribi, cujus Axis eſt OMQ. In hac curva, ſi portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræſentabit quæ uſque ad illud tempus, ſingulis momentis, proportionaliter crevit. Nam ſi capiantur ml &c. $= Mm$, ordinatæ lp &c. erunt in ſerie continue proportionalium in ratione MN ad mn, id eſt creſcent eâdem ratione, qua pecunia creſcit.

Tangat logarithmicam in N recta NX, ejus ſubtangens MX erit conſtans & invariabilis, & triangulum minimum Non ſimile erit triangulo XMN. At oſtenſum eſt, eſſe incrementum $no = Mm \times a = No \times a$ erit itaque $no : No :: No \times a : No :: a : 1$. Sed ut no ad No, ita erit NM ad MX. Quare erit, ut a ad 1, ita NM ſeu 1 ad $MX = \frac{1}{a}$ ſubtangenti.

Quod ſi Uſura annua ſit pars ſortis viceſima, ſeu ſi ſit $a = \frac{1}{20} = ,05$, erit $MX = \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diverſis logarithmorum formis, ejuſdem numeri logarithmi ſunt ſubtangentibus ſuarum curvarum, pro-

proportionales: ſi MQ tempus Annuum, ſeu unitatem, exponat; QY erit pecùnia quæ finito anno debetur. Ut verò innoteſcat QY; Fiat ut MX ſeu 20 ad 0, 4342944 (qui numerus exponit ſubtangentem logarithmicæ, quæ exhibet logarithmos *Briggianos*) ita annus, ſive unitas, ad logarithmum *Briggianum*, qui numero QY congruit; logarithmus autem ille invenietur 0. 0217147 cui reſpondens numerus = QY eſt 1 ,05127, cujus incrementum ſupra unitatem ſive ſortem ,05127 pauxillum ſuperat annuam uſuram ,05. Adeo ut ſi uſura annua centum librarum ſit quinque libræ, uſura proportionalis ſingulis anni momentis ſorti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni, *lib.* : *ſol.* : *d.*
5 : 2 : $6\frac{1}{3}$

Si quæratur uſura ejuſmodi, ut ſingulis momentis pars ipſius ſorti continue creſcenti proportionalis, ad ſortem accedat ea lege ut finito anno producat incrementum quod ſit ſortis pars quælibet (data v. gr. viceſima. Fiat ut lóg. numeri 1, 05 ad 1, hoc eſt ut 0, 0211893 ad 1; ita ſubtangens 0, 4342944 ad $\frac{1}{a}$ = 20,49, & erit $a = \frac{1}{20{,}49}$ = ,0488. Nam ſi concipiatur pars uſuræ ,0481 momento reſpondens, hoc eſt eandem habens rationem ad ,0488 quam habet momentum ad annum, & fiat ut unitas ad illam uſuræ partem, ita ſors ad ejus incrementum momentaneum; quæ hac ratione continuò creſcit pecunia, ad finem anni augebitur viceſima ſui parte.

CAPUT VI.

De Methodo qua Henricus Briggius *Logarithmos ſuos ſupputavit, ejuſque Demonſtratio.* *Vide Fig.* 4.

QUamvis *Briggius* lineam Logarithmicam nuſquam deſcripſit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique Rationem ex contemplatione Logarithmicæ

micæ evidentissime patebit. In qualibet Logarithmica HBD sint tres ordinatæ AB *ab* *qs* quam proxime æquales, hoc est earum differentiæ exiguam admodum ad ipsas lineas habeant rationem; Erunt Logarithmorum differentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum lineæ sunt quam proxime æquales, propinquissime sibi invicem erunt, & pars curvæ B*s* ab iis intercepta cum recta linea fere concidet, certe tam prope possunt ordinatæ sibi invicem admoveri, ut differentia curvæ, à recta ipsam subtendente, habeant ad ipsam subtensam, minorem qualibet datâ rationem. Triangula igitur B*cb* B*rs* pro rectilineis assumi possunt, & erunt æquiangula. Quare est *sr*:*bc*::B*r*:B*c*::A*q*:A*a*: hoc est excessus linearum supra minimam AB, erunt logarithmorum differentiis proportionales. Hinc patet ratio istius methodi qua tam numeri quam Logarithmi per differentias & partes proportionales corriguntur. Quod si AB sit unitas, erunt numerorum logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Si intra numeros denarium & unitatem capiatur medius proportionalis, seu quod idem est, numeri denarii extrahatur Radix quadratica, Radix illa seu numerus in medio erit loco intra denarium & Unitatem. & ejus Logarithmus erit dimidius Logarithmi qui denario competit ac proinde dabitur. Si inter numerum prius inventum & unitatem, iterum inveniatur medius proportionalis quod fit extrahendo numeri inventi Radicem quadraticam, hic numerus Unitati duplo vicinior erit quam prior, ejusque logarithmus erit prioris logarithmi semissis, seu Logarithmi denario competentis pars quarta. Si hac ratione continuo extrahatur Radix quadratica & bisecentur Logarithmi, pervenietur tandem ad numerum cujus distantia ab unitate minor erit parte $\frac{1}{1\ 00000\ 00000\ 00000}$ istius logarithmi qui Denario tribuitur. *Briggius* peractis 54 Radicum extractionibus; Invenit numerum 1, 00000 00000 00000 12781 91493 20032 3442 ejusque logarithmum fore 0, 00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702.

suppo-

ſupponatur Logarithmus hic æqualis A *q* ſive B *r*, & ſit *q s* numerus radicum extractione inventus; erit differentia *r s* qua unitatem ſuperat = ,00000 00000 00000 12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus logarithmus inveniendus ſit) & unitatem quærantur (ut ſuperius oſtenſum eſt) medii proportionales, donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem ſuperans ut unitas præcedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notæ ſignificativæ ſequantur. Sit numerus ille *ab*, & notæ ſignificativæ, præfixis cyphris differentiam *b c* denotabunt. Deinde fiat ut differentia *r s* ad differentiam *b c* ita B *r* Logarithmus datus ad B *c* vel A *a* Logarithmum numeri *a b*; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ ſunt, tandem dabit Logarithmum numeri quæſiti. Hac etiam ratione Inveniri poſſit Subtangens Logarithmicæ nempe ſi fiat *r s* : B *r* : : A B ſeu unitas : A T ſubtangenti, quæ itaque invenietur 0, 43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum logarithmi innoteſcent, nempe ſi detur numerus quivis N M ejuſque Logarithmus & quæratur alterius numeri logarithmus qui ad N M ſatis accedat, fiat ut N M ad ſubtangentem X M ita *n o* differentia numerorum ad N *o* differentiam Logarithmorum. Quod ſi N M ſit Unitas = A B dabuntur logarithmi multiplicando differentias minimas *b c* per ſubtangentem conſtantem A T.

Fig. 5.

Hac ratione Invenientur Logarithmi numerorum 2 3 & 7, & inde dabuntur Logarithmi numerorum 4 8 16 32 64 &c. 9 27 81 243 &c. item 7 49 343 &c. Si à logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus reſtabit logarithmus Quinarii. & proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compoſiti, nempe 6 12 14 15 18 20 21 24 28 &c. facile logarithmis ſuis inſtruuntur, addendo logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum logarithmos, per tot Radicum

cum extractiones Invenire, molestum admodum & laboriosum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias Primas, Secundas, & Tertias &c. Logarithmos supputare. Quo itaque absque tanta molestia Numerorum logarithmi obtineantur, Magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Wallisius*, & nuper *Halleius* series infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius & certius logarithmi, ad quot volueris loca supputati haberi possunt; De hisce seriebus, eruditum Tractatum scripsit peritissimus Geometra *Halleius* inter Acta Philosophica Societatis Regiæ extantem, ubi series illas nova methodo demonstrat, modumque computandi logarithmos per eas docuit. Liceat hic subjungere novam seriem, ex qua expedite & facile fluunt Logarithmi saltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, Numeri $z-1$ $z+1$ erunt pares, & proinde dabuntur eorum logarithmi, & Logarithmorum differentia, quæ dicatur y; Quin etiam datur Logarithmus numeri qui est medius Geometricus inter numeros $z-1$ & $z+1$ æqualis scil. semisummæ logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis logarithmo Rationis quam habet Geometricus medius inter numeros $z-1$ & $z+1$ ad Arithmeticum medium scil. numerum z.

Si Numerus superat 1000, Primus seriei terminus $\frac{y}{4z}$ sufficit ad producendum logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca, secundus terminus dabit logarithmi loca viginti. At si z major sit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, & hinc ejus usus optimus erit, in supplendis logarithmis Chiliadum à *Briggio* prætermissis; Hujus rei capiamus exemplum, sit inveniendus logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem est ac logarith-

mus

mus binarii præfixo Indice 4. & differentia Logarithmorum 20000 & 20002, idem eſt ac differentia Logarithmorum pro numeris 1000 & 10001, ſcil. 0,00004 34272 7687. Hæc differentia ſi per 4 z ſeu 80004 dividatur

Quotiens $\frac{y}{4z}$ erit — — —	0,00000 00005 42813
Huic quoto addatur log. numeri Geometrici medii, ſumma	4,30105 17093 02416
	4,30105 17098 45230

erit Logarithmus numeri 20001. Hinc patet, ut habeatur logarithmus ad quatuordecim loca non opus eſſe producere quotum ultra ſex loca. At ſi logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut à *Vlacquo* in ſuis Tabulis factum eſt, duæ primæ quotientis notæ ſufficiunt. Et ſi hac methodo computentur Logarithmi pro numeris ſupra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exſcribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis quæ ab *Halleio* inventæ ſunt, facile ſequitur, qui autem plura de iis ſcire cupit, Præfatum Tractatum adeat & diſcat.

FINIS.

Books Printed and Sold by Richard Clements *Bookseller in* Oxford.

1. A Preservative against Socinianism, shewing the direct and plain opposition between it and the Religion reveal'd by God in the Holy Scriptures. The first part, by Jonath. Edwards D. D. late Principal of Jesus Coll: Oxon. in 4to. Price 6 pence.
2 The Second Part, by the same Author. 4to. Price 1 Shill.
3 The Fourth Part, by the same Author. 4to. Price 1*s*. 6*d*.
4 An Index to the Four Parts of Dr. Edward's Preservative against Socinianism. 4to. Price 4*d*.
5 Remarks upon a Book lately publish'd by Dr. William Sherlock Dean of St. Paul's &c. entituled A Modest Examination of the Oxford Decree, &c. by the same Author. 4to. price 6*d*.
6 M. Tullius Cicero de Officiis, ad Marcum f. ex MSS. recensuit Tho. Cockman è Coll. Univ. A. B. Editio secunda 8vo. Price 3*s*.
7 M. Fabii Quinctiliani Dclamationum Liber, cum ejusdem (ut nonnullis visum) dialogo de Causis Corruptæ Eloquentiæ, quæ omnia Notis illustrantur 8vo. Price 2*s*. 6*d*.
8 Xenophontis memorabilia Gr. Lat. cura Joannis Gilman. Price 4*s*. 6*d*.
9 Institutio Logicæ ad Communes Usus accommodata, per Joannem Wallis S. T. D. Geometriæ Professorem Savilianum, Oxoniæ Editio Quarta. 8vo. Price 3*s*.
10 St. Athanasius's four Orations against the Arians, and his Oration against the Gentiles. Translated from the Original by Mr. Samuel Parker, in two volumes. 8vo. Price 8*s*.
11 Euclidis Elementorum Libri priores Sex, item Undecimus & Duodecimus. Ex Versione Latina Frederici Commandini, Quibus accedunt Trigonometriæ Planæ & Sphæricæ Elementa: Item Tractatus de Natura & Arithmetica Logarithmorum. 8vo. Price 5*s*.
12 Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ. 8vo. separatim. Price 1*s*. 6*d*.
13 Antonii Walæi, S. T. P. Compendium Ethicæ Aristotelicæ ad normam Veritatis Christianæ revocatum. 8vo. Lond. 1708. Price 1*s*. 6*d*.
14 Aditus ad Logicam. In usum eorum qui primo Academiam salutant. Autore Samuele Smith, A. M. 12mo. Oxon. 1684. Price 1*s*.

15 Gram-

15 Grammatica Rationis five Inftitutiones Logicæ. 12mo. Oxonii, è Theatro Sheldoniano. Price 2*s*.

16 Synopfis Metaphyfica Andreæ Frommenii Editio ultima. Oxon. Price 2*s*. 6*d*.

17 Synopfis Communium Locorum, præcipuæ ad mores fpectantium: ex poetis Latinis tum antiquioribus tum recentioribus collecta: & in capita cuique propria digefta. Editio tertia accuratius recognita & caftigata. 12mo. Lond. 1719. Price 2*s*. 6*d*.

18 Græcæ Linguæ Dialecti. In ufum Scholæ Weftmonafterienfis, opera ac ftudio Mich. Maittaire A. M. Ædis Chrifti apud Oxonienfes Alumn. 8vo. Lond. 1706. Price 4*s*.

19 Theodofii Sphæricorum libri tres, Græce & Latine. Cura Jof. Hunt è Coll. Ball. 8vo. Oxon. Price 3*s*. 6*d*.

20 Rogeri Afchami Epiftolarum libri quatuor. Acceffit Joannis Sturmii Aliorumque ad Afchamum, Anglofque *alios* eruditos Epiftolarum liber unus. Editio noviffima prioribus auctior. 8vo. Oxon. 1703. Price 3*s*. 6*d*.

21 Poems on feveral occafions, by Mr. Smith of Magdalen Coll. 8vo. Lond. 1713. Price 2*s*. 6*d*.

22 The Works of Ben. Johnfon in 6 volumes, adorn'd with Cutts. 8vo. Lond. 1716. Price 18*s*.

23 New Experiments and Obfervations touching Cold, or an Experimental Hiftory of Cold, begun: to which are added an Examen of Antiperiftafis, and an Examen of Mr. Hobbs's Doctrine about Cold. By the Honourable Robert Boyle Efq; 4to. Lond. 1683. Price 4*s*.

24 Manuductio ad Logicam, five dialectica ftudiofæ jueentuti ad Logicam præparandæ confcripta A: R. P. Philippo du Trieu è Societate Jefu. Cui annectitur Tractatus brevis & dilucidus de Demonftratione acceffit infuper Cl. Gaffendi *elegans* Differtatiuncula de Natura Demonftrationis, Annotationibus quibufdam illuftrata. 8vo. Oxon. 1678. Price 1*s*.

25 Globe Notes by R. Holland. 8vo. Oxford 1701. Price 4*d*.

26 Cafpari Bartholini. Thom. F. Specimen Philofophiæ Naturis, præcipua phyfices Capita exponens, in gratiam Juventutis Academicæ. Accedit de Fontium Fluviorumque Origine, ex pluviis Differtatio Phyfica. 12mo. Oxon. 1713. Price 1*s* 6*d*.

27 Apoftolici: or, the Hiftory of the Lives, Acts, Death, and Martyrdoms of thofe who were Contemporary with, or *Immediately* Succeeded the Apoftles, as alfo the moft eminent of the Primitive Fathers for the Firft Three Hundred Years: to which is added a Chronology of the Three Firft Ages of the Church. By William Cave D.D. The Fourth Edition. Folio. Lond. 1716. Price 1*l*. 5*s*.

28 The

28 The Genuine Works of St. Cyprian, Arch-Bishop of Carthage, and Primate of all Africa; together with his Life written by his own deacon Pontius. All done into English, from the Oxford Edition; and illustrated with diverse Notes. By Nath. Marshal LL. B. Fol. Lond. 1717. Price 1*l.* 1*s.*

29 Bibliotheca Biblica: being A Commentary upon all thebooks of the Old and New Testament. 4to. to be Continu'd. The price of each Number 6*d.*

30 Dissertationes Medico-Physicæ. De Antris Lethiferis. De montis Vesuvii Incendio. De stupendo Ossium Coalitu. De Immani Hypogastrii Sarcommate, A. D. Bernardo Connor M. D. Serenissimi Poloniæ Regis Medico. E Regia Cameræ Parisiensis Societate. Oxonii, è Theatro. 8vo. 1695. Price 1*s.* 6.

31 Logice Artis Compendium. Authore Roberto Sandersono Episc. Lincoln. 8vo. Oxonii. Price 1*s.* 6*d.*

32 The English Grammar: or an Essay on the Art of Grammar, applied to and exemplified in the English Tongue. By Michael Maittaire. 8vo. Lond. 1712. Price 2*s.* 6*d.*

33 The History of Greece. Vol. I. Containing the Space of about 1660 years; from the first Plantation of Greece to the Peloponnesian War. By Thomas Hind, M. A. of Lincoln Coll. Oxford. 8vo. Lond. 1707. Price 3*s.* 6*d.*

